文章编号:1671-9352(2016)02-0021-08 DOI:10.6040/j.issn.1671-9352.0.2015.190

# 椭圆方程约束的最优边界控制问题的非重叠型区域分解迭代方法

刘文月,孙同军*
(山东大学数学学院, 山东 济南 250100)

**摘要**:研究了一类椭圆方程约束的最优边界控制问题的数值求解方法。为了避免运用传统数值方法所产生庞大的计算量,我们采用非重叠型区域分解迭代方法。即:将求解区域$\Omega$分解成若干个非重叠子区域,把上述的最优边界控制问题分解成这些子区域上的局部问题,这些局部问题间的内边界条件采用Robin条件。建立了求解这些局部问题的迭代格式,推导证明了迭代格式的收敛性。最后,给出一个数值算例,验证了迭代格式的有效性。

**关键词**:椭圆方程;最优边界控制问题;非重叠型区域分解;迭代方法;Robin条件
**中图分类号**:O241.82 **文献标志码**:A
**引用格式**:刘文月,孙同军. 椭圆方程约束的最优边界控制问题的非重叠型区域分解迭代方法[J]. 山东大学学报(理学版),2016,51(2):21-28.

# Iterative non-overlapping domain decomposition method for optimal boundary control problems governed by elliptic equations

LIU Wen-yue, SUN Tong-jun*
(School of Mathematics, Shandong University, Jinan 250100, Shandong, China)

**Abstract**: A numerical method for solving optimal boundary control problems governed by elliptic equations is considered. In order to avoid large amounts of calculation produced by traditional numerical methods. An iterative non-overlapping domain decomposition method is established. The whole domain is divided into many non-overlapping subdomains, and the optimal boundary control problem is decomposed into local problems in these subdomains. Robin conditions are used to communicate the local problems on the interfaces between subdomains. The iterative scheme for solving these local problems is studied, and prove the convergence of the scheme is proved. Finally, a numerical example to prove the validity of the scheme is presented.

**Key words**: elliptic equation; optimal boundary control problem; non-overlapping domain decomposition method; iterative method; Robin conditions

## 0 引言

在系统控制理论中,所谓的最优控制问题,指在特定的条件下,寻求系统容许的一种控制模式(控制变量),使系统的受控对象(状态变量,如温度或位置等)从最初状态转化到某种要求的终端状态,并确保所规定的性能指标(目标函数)达到最大(小)值。若状态变量和控制变量受确定的偏微分方程约束(即满足偏微分方程成立),则称这种最优控制问题为偏微分方程约束的最优控制问题。

**收稿日期**:2015-04-23; **网络出版时间**:2015-09-09 16:06:47
**网络出版地址**:http://www.cnki.net/kcms/detail/37.1389.N.20150909.1606.006.html
**基金项目**:国家自然科学基金资助项目(11301300, 11271231)
**作者简介**:刘文月(1988— ),女,硕士研究生,研究方向为偏微分方程最优控制问题的数值解法. E-mail:1412635020@qq.com
*通讯作者:孙同军(1970— ),男,博士,副教授,研究方向为偏微分方程数值解法. E-mail:tjsun@sdu.edu.cn

科学与工程领域中,如 Stefan-Boltzmann 辐射定律、种群动力学中的 Lotka-Volterra 模型等,都可以用偏微分方程约束的最优控制问题来描述。文献[1]系统地研究了偏微分方程约束的最优控制问题的理论及数值解法。文献[2-5]开展了进一步的研究。在数值求解此类问题时,通常采用有限元方法去离散求解。一般过程是:建立起离散的目标函数 $J$ 、状态变量 $y$ 和对偶状态变量 $p$ 的计算格式以及最优性条件(不等式);采用迭代算法(如共轭梯度法),依次计算求解。若问题的计算区域很大,就会产生庞大的计算量。

非重叠型区域分解方法是一类很适合于并行计算的数值方法。通过将区域 $\Omega$ 分解成若干个非重叠的子区域 $\Omega_i$,把最优控制问题分解成这些非重叠子区域上的局部问题。这些局部问题之间存在独立性,可以同时计算。因此,可以将庞大的整体计算分解成若干小规模的局部计算,大大降低了计算工作量和缩减了计算时间。目前,有很多文献探讨了区域分解方法在偏微分方程中的应用[6-9]。文献[10-13]研究了偏微分方程约束的最优控制问题的区域分解方法。这些研究工作中,一个重要内容是如何建立各子区域间状态变量和对偶状态变量的内部边界条件。文献[14]研究了波动方程最优控制问题的非重叠型区域分解迭代方法,提出来一种内边界上的 Robin 传递条件(又称混合边界条件)。证明了在这个条件下,非重叠区域分解迭代方法是收敛的。需要指出的是:文献[14]只证明了控制变量在区域内部时(即非边界控制问题),该迭代格式的收敛性,提出了控制变量在边界上时(即边界控制问题)的非重叠区域分解迭代格式,但没有证明其收敛。在文献[14]的基础上,本文讨论椭圆型最优边界控制问题的非重叠型区域分解迭代方法。

## 1 模型

令 $\Omega\subset\mathbf{R}^2$ 中具有光滑边界$\partial\Omega$ 的有界凸区域。选取状态空间为 $V=H^1(\Omega)$,控制空间为 $U=L^2(\partial\Omega)$。考虑如下的椭圆方程约束的最优边界控制问题

$$\min_{u\in U} J(u), \tag{1.1}$$

其中,状态变量 $y(u)\in V$ 和控制变量 $u\in U$ 满足

$$\begin{cases} -\Delta y = f, & x \text{ in } \Omega, \\ \dfrac{\partial y}{\partial \vec{n}} = u+g, & x \text{ on } \Gamma_N, \\ y = y_d, & x \text{ on } \Gamma_D。 \end{cases} \tag{1.2}$$

在方程(1.2)中, $\Gamma_N$ 和 $\Gamma_D$ 分别是 Neuman 边界和 Dirichlet 边界, $\partial\Omega=\Gamma_N\cup\Gamma_D$, $\Gamma_N\cap\Gamma_D=\varnothing$, $\vec{n}$ 是边界$\partial\Omega$ 上的单位外法向量; $f$, $g$ 以及 $y_d$ 是已知函数。

设目标泛函为

$$J(u) = \frac{1}{2}\left\{\int_\Omega \gamma \mid y(x)-y_0(x)\mid^2 \mathrm{d}x + \int_{\Gamma_N}\alpha\mid u(x)\mid^2\mathrm{d}s\right\}。 \tag{1.3}$$

这里, $y_0(x)$是已知的目标状态量;系数 $\alpha$ 和 $\gamma$ 均为大于 0 的常数,起着平衡状态变量 $y$ 和控制变量 $u$ 的作用。

由最优控制理论[1,3], 首先可以推出模型问题(1.2)的对偶问题

$$\begin{cases} -\Delta p = \gamma(y-y_0), & x \text{ in } \Omega, \\ \dfrac{\partial p}{\partial \vec{n}} = 0, & x \text{ on } \Gamma_N, \\ p = 0, & x \text{ on } \Gamma_D。 \end{cases} \tag{1.4}$$

这里,$p$ 称作为 $y$ 的对偶状态变量。

其次,泛函 $J$ 在凸集 $U$ 上要达到最优, 等价于控制变量 $u\in U$ 必须满足:

$$J'(u)(v-u)\geqslant 0,\ \forall v\in U。 \tag{1.5}$$

由泛函的方向导数定义展开上式,即可得

$$J'(u)(v-u) = \int_{\Gamma_N}(\alpha u+p)(v-u)\mathrm{d}s \geqslant 0,\ \forall v\in U。 \tag{1.6}$$

这个不等式又称为最优性条件。

因此,椭圆方程约束的最优控制问题(1.1 ~ 1.2),就等价于由状态方程(1.2),对偶状态方程(1.4)及最优性条件(1.6)组成的方程系统。数值求解最优控制问题(1.1 ~ 1.2),就转化为数值求解(1.2)、(1.4)及(1.6)。

## 2　非重叠型区域分解迭代格式

本节将建立数值求解方程系统(1.2)、(1.4)及(1.6)的非重叠型区域分解迭代格式,并证明格式的收敛性。

### 2.1　区域分解迭代格式

首先,我们将区域 $\Omega$ 分解成若干个非重叠型子区域 $\Omega_i(i=1,\cdots,N)$ 的和,即

$$\Omega=\bigcup_i^N \bar{\Omega}_i,\ \Omega_i\cap\Omega_j=\emptyset,\ \forall\, i\neq j。$$

用 $\Gamma_{D,i}=\Gamma_D\cap\partial\Omega_i$ 和 $\Gamma_{N,i}=\Gamma_N\cap\partial\Omega_i$ 分别表示 $\Gamma_D$ 和 $\Gamma_N$ 与 $\partial\Omega_i$ 的交集,$\Gamma_{D,i}\neq\emptyset$,$\Gamma_{N,i}\neq\emptyset$,$\Sigma_{ij}=\partial\Omega_i\cap\partial\Omega_j$ 表示子区域 $\Omega_i$、$\Omega_j$ 的相交的内边界,且 $\Sigma_{ij}=\Sigma_{ji}$。令 $\vec{n}_i$ 为边界 $\partial\Omega_i$ 的单位外法向量。这里,假设区域分解具有充分的正则性,以保证全局问题和局部问题具有良好的性质。

我们采用迭代方法求解上述问题。将方程系统(1.2)、(1.4)和(1.6)分解成局部问题,其中 $\Omega$、$\Gamma_N$ 和 $\Gamma_D$ 分别被 $\Omega_i$、$\Gamma_{N,i}$ 和 $\Gamma_{D,i}$ 代替。假设局部问题在子区域 $\Omega_i$ 上第 $k+1$ 步的解为 $(y_i^{k+1},\ p_i^{k+1},\ u_i^{k+1})$,它们满足

$$J_i^{k+1}(u)=\frac{1}{2}\Big\{\int_{\Omega_i}\gamma\,|\,h_i^{k+1}(x)-y_0(x)\,|^2\mathrm{d}x+\int_{\Gamma_{N,i}}\alpha\,|\,u_i^{k+1}(x)\,|^2\mathrm{d}s\Big\},\tag{2.1}$$

$$\begin{cases}-\Delta y_i^{k+1}=f, & x\ \text{in}\ \Omega_i,\\ \dfrac{\partial y_i^{k+1}}{\partial\vec{n}_i}=u_i^{k+1}+g, & x\ \text{on}\ \Gamma_{N,i},\\ y_i^{k+1}=y_d, & x\ \text{on}\ \Gamma_{D,i},\end{cases}\tag{2.2}$$

$$\begin{cases}-\Delta p_i^{k+1}=\gamma(y_i^{k+1}-y_0), & x\ \text{in}\ \Omega_i,\\ \dfrac{\partial p_i^{k+1}}{\partial\vec{n}_i}=0, & x\ \text{on}\ \Gamma_{N,i},\\ p_i^{k+1}=0, & x\ \text{on}\ \Gamma_{D,i},\end{cases}\tag{2.3}$$

以及

$$\int_{\Gamma_{N,i}}(p_i^{k+1}+\alpha u_i^{k+1})(v_i-u_i^{k+1})\mathrm{d}s\geqslant 0,\ \forall\, v_i\in U_i。\tag{2.4}$$

其中,子空间 $U_i$ 为空间 $U$ 在每个子区域上的限制,即

$$\forall\, u\in U,\ u\,|_{\Omega_i}=u_i\in U_i。\tag{2.5}$$

定义如下的范数和内积:

$$\begin{aligned}&\|y\|_{N,i}^2=\int_{\Gamma_{N,i}}y^2\mathrm{d}s,\ \langle y,y'\rangle_{N,i}=\int_{\Gamma_{N,i}}yy'\mathrm{d}s,\\ &\|y\|_{ij}^2=\int_{\Sigma_{ij}}y^2\mathrm{d}s,\quad \langle y,y'\rangle_{ij}=\int_{\Sigma_{ij}}yy'\mathrm{d}s,\\ &\|y\|_i^2=\int_{\Omega_i}y^2\mathrm{d}x,\quad (y,y')_i=\int_{\Omega_i}yy'\mathrm{d}x。\end{aligned}\tag{2.6}$$

根据如上的定义,给出(2.2 ~ 2.3)的子区域 $\Omega_i$ 上的有限元迭代格式:

$$\begin{cases}(\nabla y_i^{k+1},\nabla v)_i=(f,v)_i+\langle u_i^{k+1}+g,v\rangle_{\Gamma_{N,i}}+\sum\limits_{i\neq j,\ \Sigma_{ij}\neq\emptyset}\langle\dfrac{\partial y_i^{k+1}}{\partial\vec{n}_i},\ v\rangle_{ij},\ \forall\, v\in H_{0,\Gamma_{D,i}},\\ (\nabla p_i^{k+1},\nabla v)_i=\gamma(y_i^{k+1}-y_0,v)_i+\sum\limits_{i\neq j,\ \Sigma_{ij}\neq\emptyset}\langle\dfrac{\partial p_i^{k+1}}{\partial\vec{n}_i},\ v\rangle_{ij},\ \forall\, v\in H_{0,\Gamma_{D,i}},\end{cases}\tag{2.7}$$

其中 $H_{0,\Gamma_{D,i}} = \{v \in H^1(\Omega_i);\ v = 0,\ x \in \Gamma_{D,i}\}$。

此外,还要定义子区域相交的内边界处的边界条件。这些条件称为传递条件,因为这些条件能够将连续迭代步骤之间的相邻子区域间的局部解联系起来。这里,采用 Robin 条件(又称为混合边界条件),其中的状态变量和对偶状态变量是反对称的(参见文献[14]):

$$\frac{\partial y_i^{k+1}}{\partial \vec{n}_i} + \beta p_i^{k+1} = -\frac{\partial y_j^k}{\partial \vec{n}_j} + \beta p_j^k,\ x \text{ on } \Sigma_{ij}, \tag{2.8}$$

$$\frac{\partial p_i^{k+1}}{\partial \vec{n}_i} - \beta y_i^{k+1} = -\frac{\partial p_j^k}{\partial \vec{n}_j} - \beta y_j^k,\ x \text{ on } \Sigma_{ij}。 \tag{2.9}$$

这些条件加强了子区域问题的解及其方向导数在内边界 $\Sigma_{ij}$ 上的连续性。这样,全局问题可以由子问题组合形成。$\beta$ 的选择将在第 3 节讨论。

### 2.2 格式的收敛性证明

为了简化证明过程,取$\beta = 1$及$\gamma = 1$。定义最优控制问题的全局解和区域分解方法产生的局部解之间的误差为:

$$(\bar{y}_i, \bar{p}_i, \bar{u}_i) = (y, p, u) - (y_i, p_i, u_i)。 \tag{2.10}$$

易见,误差$(\bar{y}_i, \bar{p}_i, \bar{u}_i)$同样满足方程(2.2 ~ 2.4)及(2.6 ~ 2.8),此时$f = 0$, $g = 0$, $y_0 = 0$, $y_d = 0$。

下面定义子区域的内边界 $\Sigma_{ij}$ 上的能量序列$\{E^k\}$:

$$E^{k+1} = \sum_{i\neq j,\ \Sigma_{ij}\neq\emptyset} \left\{ \| \frac{\partial \bar{y}_i^{k+1}}{\partial \vec{n}_i} \|_{ij}^2 + \| \bar{p}_i^{k+1} \|_{ij}^2 + \| \frac{\partial \bar{p}_i^{k+1}}{\partial \vec{n}_i} \|_{ij}^2 + \| \bar{y}_i^{k+1} \|_{ij}^2 \right\}。 \tag{2.11}$$

利用它来证明上述非重叠型区域分解迭代格式(2.2 ~ 2.4)的收敛性。

在方程(2.6 ~ 2.8)中用$(\bar{y}_i^{k+1}, \bar{p}_i^{k+1}, \bar{u}_i^{k+1})$代替$(y_i^{k+1}, p_i^{k+1}, u_i^{k+1})$,则方程(2.11)可变为

$$\begin{aligned}
E^{k+1} = & \sum_{i\neq j,\ \Sigma_{ij}\neq\emptyset} \left\{ \langle \frac{\partial \bar{y}_i^{k+1}}{\partial \vec{n}_i}, \frac{\partial \bar{y}_i^{k+1}}{\partial \vec{n}_i} \rangle_{ij} + \langle \bar{p}_i^{k+1}, \bar{p}_i^{k+1} \rangle_{ij} + \langle \frac{\partial \bar{p}_i^{k+1}}{\partial \vec{n}_i}, \frac{\partial \bar{p}_i^{k+1}}{\partial \vec{n}_i} \rangle_{ij} + \langle \bar{y}_i^{k+1}, \bar{y}_i^{k+1} \rangle_{ij} \right\} = \\
& \sum_{i\neq j,\ \Sigma_{ij}\neq\emptyset} \left\{ \langle -\bar{p}_i^{k+1} - \frac{\partial \bar{y}_j^k}{\vec{n}_j} + \bar{p}_j^k,\ -\bar{p}_i^{k+1} - \frac{\partial \bar{y}_j^k}{\vec{n}_j} + \bar{p}_j^k \rangle_{ij} + \langle -\frac{\partial \bar{y}_i^{k+1}}{\partial \vec{n}_i} - \frac{\partial \bar{y}_j^k}{\partial \vec{n}_j} + \bar{p}_j^k,\ -\frac{\partial \bar{y}_i^{k+1}}{\partial \vec{n}_i} - \frac{\partial \bar{y}_j^k}{\partial \vec{n}_j} + \bar{p}_i^k \rangle_{ij} + \right. \\
& \left. \langle \bar{y}_i^{k+1} - \frac{\partial \bar{p}_j^k}{\partial \vec{n}_j} - \bar{y}_j^k,\ \bar{y}_i^{k+1} - \frac{\partial \bar{p}_j^k}{\partial \vec{n}_j} - \bar{y}_j^k \rangle_{ij} + \langle \frac{\partial \bar{p}_i^{k+1}}{\partial \vec{n}_i} + \frac{\partial \bar{p}_j^k}{\partial \vec{n}_i} + \bar{y}_j^k, \frac{\partial \bar{p}_i^{k+1}}{\partial \vec{n}_i} + \frac{\partial \bar{p}_j^k}{\partial \vec{n}_i} + \bar{y}_j^k \rangle_{ij} \right\} = \\
& E^k - 2 \sum_{i\neq j,\ \Sigma_{ij}\neq\emptyset} \left\{ \langle \frac{\partial \bar{y}_i^{k+1}}{\partial \vec{n}_i}, \bar{p}_i^{k+1} \rangle_{ij} - \langle \frac{\partial \bar{p}_i^{k+1}}{\partial \vec{n}_i}, \bar{y}_i^{k+1} \rangle_{ij} + \langle \frac{\partial \bar{y}_i^k}{\partial \vec{n}_i}, \bar{p}_i^k \rangle_{ij} - \langle \frac{\partial \bar{p}_i^k}{\partial \vec{n}_i}, \bar{y}_i^k \rangle_{ij} \right\}。
\end{aligned} \tag{2.12}$$

在方程(2.2 ~ 2.3)中将$(y_i^{k+1}, p_i^{k+1}, u_i^{k+1})$替换为$(\bar{y}_i^{k+1}, \bar{p}_i^{k+1}, \bar{u}_i^{k+1})$,并分别与$\bar{p}_i^{k+1}$和$\bar{y}_i^{k+1}$相乘,然后将得到的方程在子区域 $\Omega_i$ 上积分得:

$$(\nabla \bar{y}_i^{k+1}, \nabla \bar{p}_i^{k+1})_i = \langle \bar{u}_i^{k+1}, \bar{p}_i^{k+1} \rangle_{\Gamma_{N,i}} + \langle \frac{\partial \bar{y}_i^{k+1}}{\partial \vec{n}_i}, \bar{p}_i^{k+1} \rangle_{ij}, \tag{2.13}$$

$$(\nabla \bar{p}_i^{k+1}, \nabla \bar{y}_i^{k+1})_i = \| \bar{y} \|_i^2 + \langle \frac{\partial \bar{p}_i^{k+1}}{\partial \vec{n}_i}, \bar{y}_i^{k+1} \rangle_{ij}。 \tag{2.14}$$

对所有 $i$, 将(2.13)和(2.14)相减,可得到如下方程:

$$-\sum_{j,\Sigma_{ij}\neq\emptyset} \left\{ (\frac{\partial \bar{y}_i^{k+1}}{\partial \vec{n}_i}, \bar{p}_i^{k+1})_{ij} - (\frac{\partial \bar{p}_i^{k+1}}{\partial \vec{n}_i}, \bar{y}_i^{k+1})_{ij} \right\} = -\| \bar{y}_i^{k+1} \|_i^2 + \langle \bar{p}_i^{k+1}, \bar{u}_i^{k+1} \rangle_{\Gamma_{N,i}}。 \tag{2.15}$$

现在, 利用 $\Omega$ 上的不等式(1.6)及 $\Omega_i$ 上的不等式(2.4)。在假设条件(2.5)下, 在(1.6)中取 $v = u_i^{k+1}$, 在(2.4)中取 $v_i = u_i$, 将这两个方程相加, 可得到如下的估计式:

$$\langle \bar{p}_i^{k+1}, \bar{u}_i^{k+1} \rangle_{\Gamma_{N,i}} \leqslant -\alpha \| \bar{u}_i^{k+1} \|_{\Gamma_{N,i}}^2。 \tag{2.16}$$

结合(2.15)与(2.16), 代入(2.12)可得到如下不等式:

$$E^{k+1} \leqslant E^k - 2\Sigma_i \{ \| \bar{y}_i^{k+1} \|_i^2 + \alpha \| \bar{u}_i^{k+1} \|_{\Gamma_{N,i}}^2 + \| \bar{y}_i^k \|_i^2 + \alpha \| \bar{u}_i^k \|_{\Gamma_{N,i}}^2 \}。 \tag{2.17}$$

综上所述,$\{E^k\}$ 是单调递减且有下界的序列,故$\{E^k\}$ 极限存在。由此,在子区域 $\Omega_i$ 上有如下的结果:

$$\| \bar{y}_i^{k+1} \|_i \to 0,\ \| \bar{u}_i^{k+1} \|_{\Gamma_{N,i}} \to 0,\ \text{当 } k \to +\infty \text{ 时}。 \tag{2.18}$$

由此可见,非重叠型区域分解迭代格式(2.2 ~ 2.4) 是收敛的。

## 3　数值算例

我们建立一个算例模型,通过实际数值计算,验证了第 2 节所提出的非重叠型区域迭代格式的有效性。

在矩形域 $\Omega=[-2,2]\times[-1/2,1/2]$上, 考虑模型(1.1 ~2.1)。设 $\Omega$ 的左右边界为 Neuman 边界,即 $\Gamma_N=\Gamma_l\cup\Gamma_r$, $\Gamma_l=\{-2\}\times(-1/2,1/2)$, $\Gamma_r=\{2\}\times(-1/2,1/2)$; $\Omega$ 的上下边界为 Dirichlet 边界,即$\Gamma_D=[-2,2]\times\{1/2\}\cup[-2,2]\times\{-1/2\}$。假定此模型及其对偶方程的定解条件为: $\forall(x_1,x_2)\in\Omega$,

$$\begin{cases} y=\cos(\pi x_1)\cos(\pi x_2), \\ p=-\cos(\pi x_1)\cos(\pi x_2), \\ u=\cos(\pi x_2), \\ y_0=(2\pi^2+1)\cos(\pi x_1)\cos(\pi x_2), \\ f=2\pi^2\cos(\pi x_1)\cos(\pi x_2)。 \end{cases} \tag{3.1}$$

算例中, 把区域 $\Omega$ 分解成左右两个非重叠的等份子区域,即:$\Omega=\Omega_1\cup\Omega_2$, $\Omega_1=[-2,0]\times[-1/2,1/2]$, $\Omega_2=[0,2]\times[-1/2,1/2]$,取两子区域间的内边界为 $\Gamma_0=\{0\}\times[-1/2,1/2]$。在计算过程中,采用三角形单元剖分区域 $\Omega_1$ 和 $\Omega_2$,剖分单元的最大直径分别取 $h=0.2,0.1,0.05$ 三种情况考虑。状态变量 $y$ 和对偶变量 $p$ 由分片线性函数逼近,而控制变量 $u$ 由分片常数逼近。

文献[14]指出一些离散迭代算子的特征值接近 1 甚至有时候超过 1。因此,文献[14]在数值实验中采用一种松弛传递条件来代替 Robin 条件,即

$$\frac{\partial y_i^{k+1}}{\partial\vec{n}_i}+\beta p_i^{k+1}=\rho\left(-\frac{\partial y_j^k}{\partial\vec{n}_j}+\beta p_j^k\right)+(1-\rho)\left(\frac{\partial y_i^k}{\partial\vec{n}_i}+\beta p_i^k\right),\ \text{on}\ \Sigma_{ij}, \tag{3.2}$$

$$\frac{\partial p_i^{k+1}}{\partial\vec{n}_i}-\beta y_i^{k+1}=\rho\left(-\frac{\partial p_j^k}{\partial\vec{n}_j}-\beta y_j^k\right)-(1-\rho)\left(\frac{\partial p_i^k}{\partial\vec{n}_i}-\beta y_i^k\right),\ \text{on}\ \Sigma_{ij}。 \tag{3.3}$$

其中, 参数 $\rho\in(0,1)$, 一般总是取 $\rho=1/2$。由于参数 $\beta$ 对迭代收敛速度有绝对性的影响, 我们取 $\beta=1/h$。

通过数值计算, 可以得到如下的结果。表 1 给出了子区域 $\Omega_1$ 上的变量 $y$、$p$ 和 $u$ 的 $L^2$ 模的误差估计及收敛阶, 而表 2 给出了子区域 $\Omega_2$ 上的变量 $y$、$p$ 和 $u$ 的 $L^2$ 模的误差估计及收敛阶。

表 1　子区域 $\Omega_1$ 上的 $L^2$ 模误差估计及收敛阶

Table 1　$L^2$-norm error and convergence order in subdomain $\Omega_1$

| $h$ | $y$ | | $p$ | | $u$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | error | rate | error | rate | error | rate |
| 0.2 | 2.9804e-2 | | 3.2698e-2 | | 1.2881e-1 | |
| 0.1 | 8.9181e-3 | 1.740 7 | 9.0824e-3 | 1.848 1 | 6.4192e-2 | 1.004 8 |
| 0.05 | 2.5182e-3 | 1.824 3 | 2.3267e-3 | 1.964 8 | 3.2070e-2 | 1.001 2 |

表 2　子区域 $\Omega_2$ 上的 $L^2$ 模误差估计及收敛阶

Table 2　$L^2$-norm error and convergence order in subdomain $\Omega_2$

| $h$ | $y$ | | $p$ | | $u$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | error | rate | error | rate | error | rate |
| 0.2 | 3.4323e-2 | | 3.2785e-2 | | 1.2874e-1 | |
| 0.1 | 9.8622e-3 | 1.799 2 | 9.1001e-3 | 1.849 1 | 6.4165e-2 | 1.004 6 |
| 0.05 | 2.7171e-3 | 1.859 8 | 2.3327e-3 | 1.963 9 | 3.2069e-2 | 1.000 6 |

以子区域间内边界 $\Gamma_0$ 上四点处为例, 表 3 给出了状态变量 $y$ 的精确值、左右两侧两个区域 $\Omega_1$ 和 $\Omega_2$ 上计算得到的近似值及它们的绝对差值。同理, 表 4 给出了对偶状态变量 $p$ 的情况。其中,$y_1$ 及 $p_1$ 表示在 $\Omega_1$ 上的近似值,$y_2$ 及 $p_2$ 表示在 $\Omega_2$ 上的近似值。

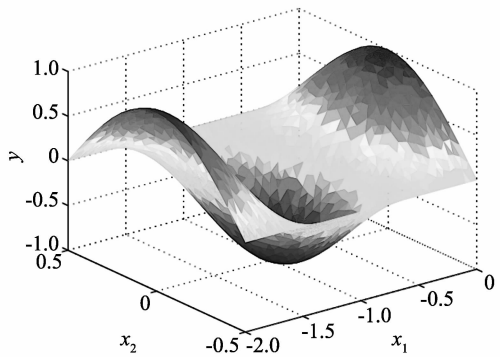
以剖分单元的最大直径 $h=0.05$ 为例,图 1 ~ 图 6 分别给出了变量 $y$、$p$ 及 $u$ 在子区域 $\Omega_1$ 及 $\Omega_2$ 上的精确解和近似解图。

表3 状态变量 $y$ 在内边界 $\Gamma_0$ 上的对比值
Table 3 The comparison of state variables $y$ on the interface $\Gamma_0$

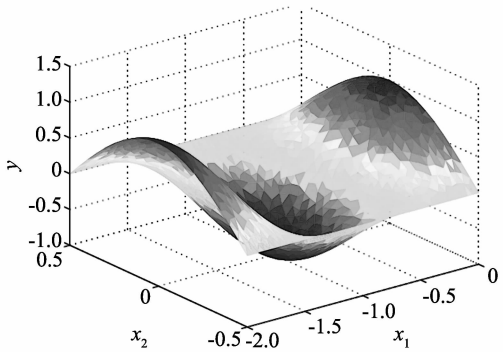
| $(x_1,x_2)$ | $y$ | $y_1$ | $y_2$ | $\lvert y_1-y_2\rvert$ |
|---|---|---|---|---|
| (0,0.40) | 0.309 0 | 0.308 9 | 0.308 7 | 2.4112e-04 |
| (0,0.15) | 0.891 0 | 0.886 6 | 0.886 9 | 3.5443e-04 |
| (0,-0.10) | 0.951 1 | 0.945 1 | 0.945 7 | 5.6954e-04 |
| (0,-0.35) | 0.454 0 | 0.453 5 | 0.453 6 | 2.4811e-05 |

表4 对偶状态变量 $p$ 在内边界 $\Gamma_0$ 上的对比值
Table 4 The comparison of adjoint-state variables $p$ on the interface $\Gamma_0$

| $(x_1,x_2)$ | $p$ | $p_1$ | $p_2$ | $\lvert p_1-p_2\rvert$ |
|---|---|---|---|---|
| (0,0.40) | −0.309 0 | −0.308 8 | −0.308 6 | 2.2448e-04 |
| (0,0.15) | −0.891 0 | −0.887 2 | −0.887 6 | 3.8340e-04 |
| (0,−0.10) | −0.951 1 | −0.947 0 | −0.947 6 | 6.1004e-04 |
| (0,−0.35) | −0.454 0 | −0.453 8 | −0.453 8 | 4.8168e-05 |

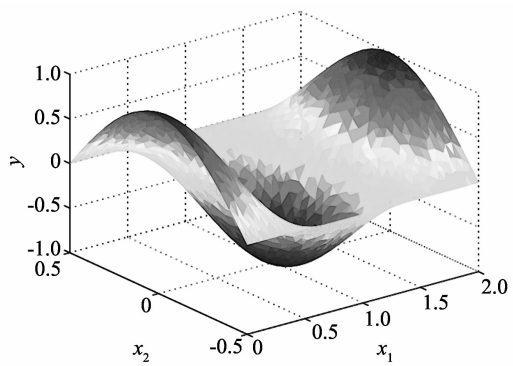



(a) $y$的精确解

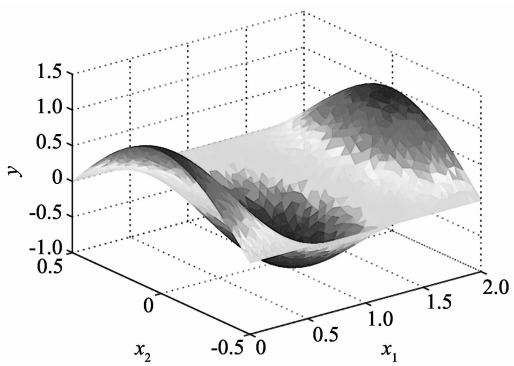



(b) $y$的近似解

图1 子区域 $\Omega_1$ 上 $y$ 的精确解和近似解
Fig. 1 The exact and approximate solution of $y$ in subdomain $\Omega_1$

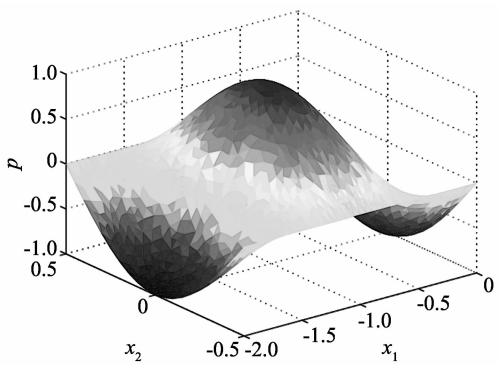



(c) $y$的精确解

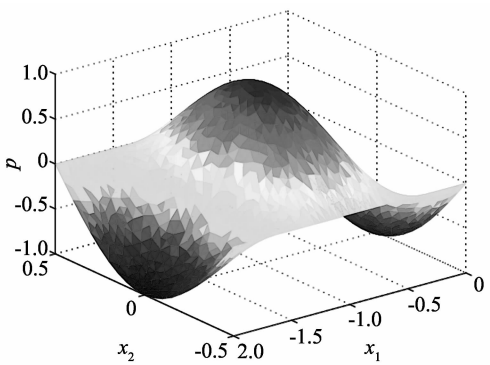



(d) $y$的近似解

图2 子区域 $\Omega_2$ 上 $y$ 的精确解和近似解
Fig. 2 The exact and approximate solution of $y$ in subdomain $\Omega_2$

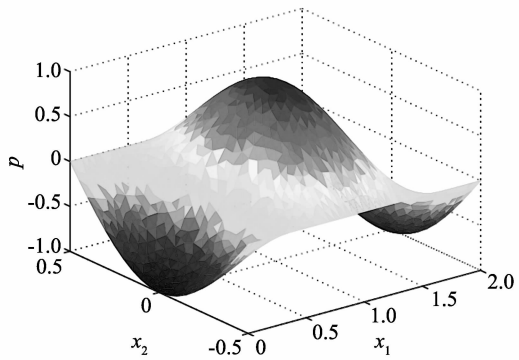



(e) $p$的精确解

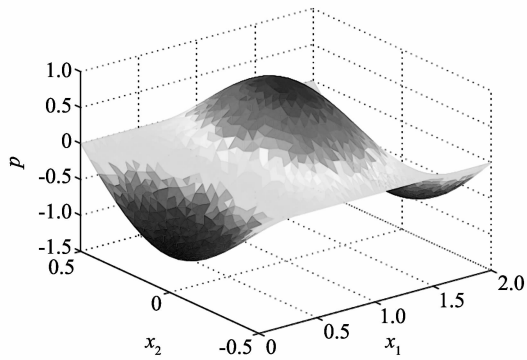



(f) $p$的近似解

图3 子区域 $\Omega_1$ 上 $p$ 的精确解和近似解
Fig. 3 The exact and approximate solution of $p$ in subdomain $\Omega_1$



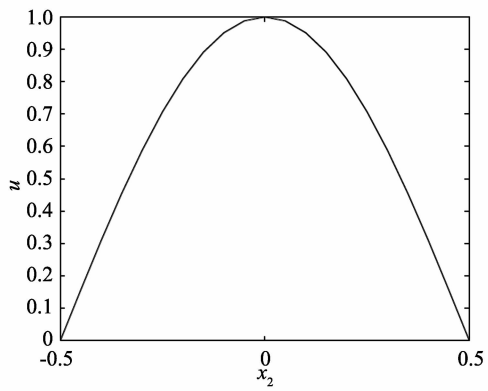

(g) $p$的精确解



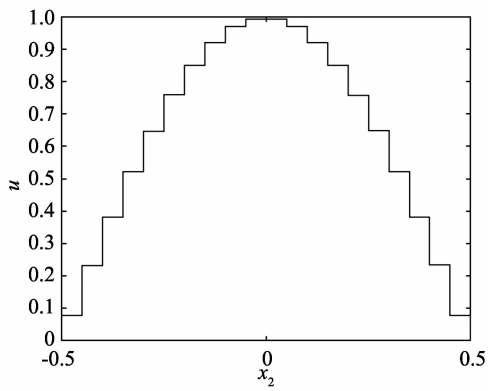

(h) $p$的近似解

图 4　子区域 $\Omega_2$ 上 $p$ 的精确解和近似解

Fig. 4　The exact and approximate solution of $p$ in subdomain $\Omega_2$



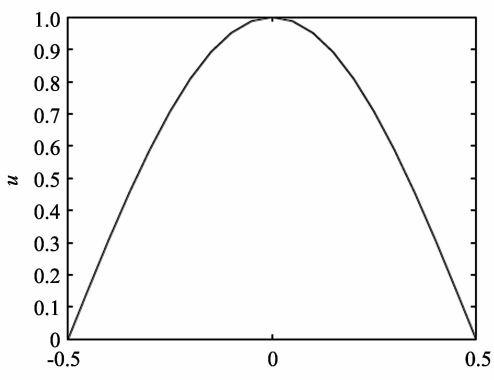

(a) $u$的精确解



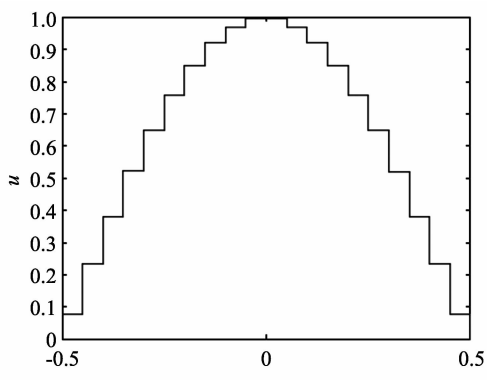

(b) $u$的近似解

图 5　左边界 $\Gamma_l$ 上 $u$ 的精确解和近似解

Fig. 5　The exact and approximate solution of $u$ on $\Gamma_l$




(c) $u$的精确解




(d) $u$的近似解

图 6　右边界 $\Gamma_r$ 上 $u$ 的精确解和近似解

Fig. 6　The exact and approximate solution of $u$ on $\Gamma_r$

图 7 描述了取 $\alpha = 0.1$ 及 $\alpha = 0.01$ 时目标泛函 $J(u)$ 在子区域 $\Omega_1$ 和 $\Omega_2$ 上值的变化趋势。一般情况下,目标泛函的迭代次数会随着 $\alpha$ 的减小而减少,但在此算例中由于 $\alpha\int_{\Gamma_N} u^2 \mathrm{d}s$ 非常小,对目标泛函的影响很小,故随着 $\alpha$ 的不同迭代次数没有很明显的变化。

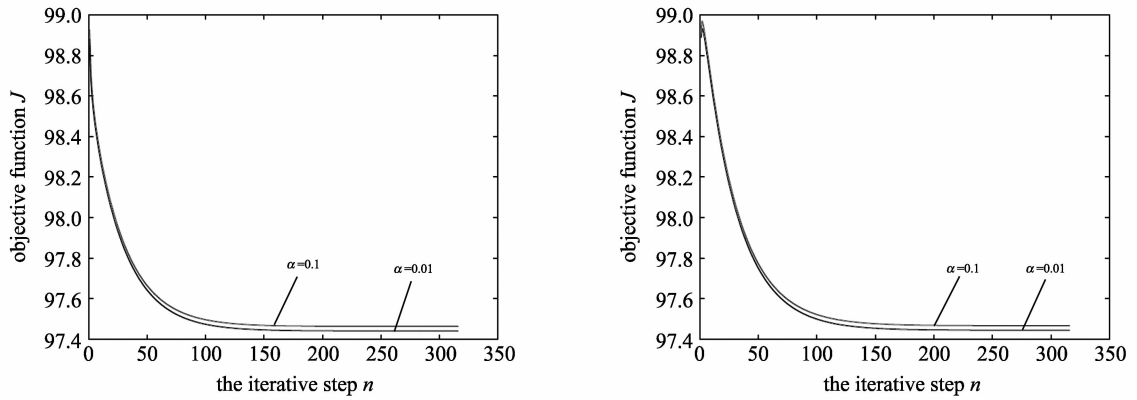



图7 子区域 $\Omega_1$ 和 $\Omega_2$ 上目标泛函 $J(u)$ 的变化趋势图

Fig. 7 The function $J(u)$ in $\Omega_1$ and $\Omega_2$

**参考文献:**


[1] LIONS J L. Optimal control of systems governed by partial differential equations[M]. New York: Springer-Verlag, 1971.

[2] NEITTAANMÄKI P, TIBA D. Optimal control of nonlinear parabolic systmes, Theroy, Algorithms and Applications[M]. Florida: CRC Press, 1994.

[3] LIU Wenbin, YAN Ningning. Adaptive finite element method for optimal control governed by PDEs[M]. Beijing: Science Press, 2008.

[4] GE Liang, LIU Wenbin, YANG Danping. Adaptive finite element approximation for a constrained optimal control problem via multi-meshes[J]. Journal of Scientific Computing, 2009, 41(2):238-255.

[5] YAN Ningning, ZHOU Zhaojie. A prior and a posteriori error analysis of edge stabilization Galerkin method for the optimal control problem governed by convection-dominated diffusion equation[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2009, 223(1):198-217.

[6] BJORSTAD P E, WIDLUND O B. Iterative methods for the solution of elliptic problems onregionsp artitionedi nto substructures[J]. SIAM Journal on Numerical Analysis, 1986, 23(6):1097-1120.

[7] BRAMBLE J H, PASCIAK J E, SCHARTA A H. The construction of preconding for elliptic problems by substructuring[J]. Mathematics of Computation, 1986, 47(175):103-134.

[8] SUN Tongjun, MA Keying. Parapllel Galerkin domain decomposition procedures for wave euqation[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2010, 233:1850-1865.

[9] MA Keying, SUN Tongjun. Galerkin domain decomposition procedures for parabolic equations on rectangular domain[J]. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 2010, 62(4):449-472.

[10] LOINS J L, BENSOUSSAN A, GLOWINSKI R. Méthode de décomposition appliquée au contrôle optimal de systèmes distribués[C]. 5th IFIP Conference on Optimization Techniques, Lecture Notes in Computer Science. Berlin: Springer Verlag, 1973: 5.

[11] BERGGREN M, HEINKENSCHLOSS M. Parallel solution of optimal control problems by time-domain decomposition[C]// Computational Science for the 21st Century, BRISTEAU M O. New York: Wiley, 1997.

[12] LEUGERING G. Domain decomposition of optimal control problems for dynamic networks of elastic strings[J]. Computional Optimization and Applications, 2000, 16(1):5-27.

[13] LEUGERING G. Dynamic domain decomposition of optimal control problems for networks of strings and Timoshenko beams [J]. SIAM Journal on Control and Optimal, 1999, 37(6):1649-1675.

[14] BENAMOU J D. Domain decomposition, optimal control of system governed by partial differential equations, and Sysnthesis of feedback laws[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 1999, 102(1):15-36.

[15] BENAMOU J D. Décompositon de domaine pour le contrôle optimal de systèmes gouvernés par des equations d'Evolution [J]. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, Série I, 1997, 324:1065-1070.

[16] BENAMOU J D. Domain decomposition methods with coupled transmission conditions for the optimal control of systems governed by elliptic partial differential equations[J]. SIAM Journal on Numerical Analysis, 1996, 33(6):2401-2416.


(编辑:陈丽萍)