山东大学学报(理学版)2018 年 10 月 第 53 卷 第 10 期
Journal of Shandong University (Natural Science), Vol.53, No.10, 2018
© 山东大学科技期刊社版权所有
E-mail:xblxb@ sdu.edu.cn
http://lxbwk.njournal.sdu.edu.cn
Tel:+86-0531-88366917

文章编号:1671-9352(2018)10-0027-08 DOI:10.6040/j.issn.1671-9352.0.2017.218

平图的 transition 多项式的 Maple 计算

李美莲[1],邓青英[2]
(1. 龙岩学院信息工程学院, 福建 龙岩 364012; 2. 厦门大学数学科学学院, 福建 厦门 361005)

摘要:将现有的计算方法改进得到了一种新的计算平图的 transition 多项式的方法。算法使用了圈置换的方法计算每个 transition 操作所产生的欧拉圈的数目。利用 Maple 软件编写出了该算法的程序,通过这个程序,可以实现任意一个平图的 transition 多项式的计算。

关键词:平图;4-正则图;transition 多项式; Maple 程序
中图分类号:O157.5 **文献标志码**:A
引用格式:李美莲,邓青英. 平图的 transition 多项式的 Maple 计算[J]. 山东大学学报(理学版),2018,53(10):27-34.

Maple calculation of the transition polynomial of plane graph

LI Mei-lian[1], DENG Qing-ying[2]
(1. School of Information Engineering, Longyan University, Longyan 364012, Fujian, China;
2. School of Mathematical Science, Xiamen University, Xiamen 361005, Fujian, China)

Abstract: A new algorithm to evaluate transition polynomials of plane graph is obtained by improving the existing computational method. The algorithm uses cyclic permutations to count the number of Euler cycles to each transition system. The algorithm can be implemented easily by the computer program written in Maple environment.
Key words: plane graph; 4-regular graph; transition polynomial; Maple program

1 引言和预备知识

文献[1]引进了一个平图的 transition 多项式的定义。给定连通平图 $G=(V,E,F)$ 和它的中间图 $\tilde{G}=(\tilde{V},\tilde{E},\tilde{F})$,由中间图的定义知 $E=\tilde{V}$。给定中间图 $\tilde{G}$ 的一个经典黑白着色,无界面着白色,则对一个四度顶点 $e\in\tilde{V}$ 分解成 2 个二度顶点,有下列 3 种可能(如图 1),分别记为黑、白、交叉型。

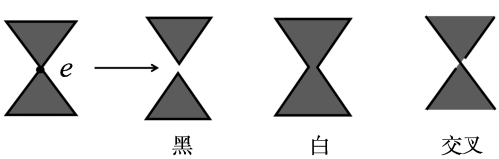


图 1 点 e 的 transition 操作 $p(e)$
Fig.1 A transition $p(e)$ at e

将图 1 的这种操作称为在顶点 e 进行了 transition 操作,记 $p(e)$。若对图 $\tilde{G}$ 的每个顶点选择黑、白、交叉 3 种中的其中一种 transition 操作, 则称 $p=\{p(e):e\in\tilde{V}\}$ 为图 $\tilde{G}$ 的一个 transition system。显然, 图 $\tilde{G}$ 有

收稿日期:2017-05-06; **网络出版时间**:2018-09-12 09:08:33
网络出版地址:http://kns.cnki.net/kcms/detail/37.1389.N.20180910.0850.002.html
基金项目:国家自然科学基金资助项目(11601214,11526107);福建省自然科学基金资助项目(2015J05010);福建省教育厅中青年项目(JAT160492)
第一作者简介:李美莲(1977—),女,硕士,副教授,研究方向为图论及纽结论. E-mail:meilian201@ 163.com

$3^{|E|}$种不同的 transition systems。每个 transition system p 将中间图 $\tilde{G}$ 分解成若干个边不交的圈(欧拉子图),把这个 transition system p 产生的欧拉圈的数目记为 $c(p)$。

现在对每个 transition 类型 $p(e)$ 赋权

$$W(p(e))=\begin{cases}\alpha, \text{ 如果 } p(e) \text{ 是黑};\\ \beta, \text{ 如果 } p(e) \text{ 是白};\\ \gamma, \text{ 如果 } p(e) \text{ 是交叉},\end{cases}$$

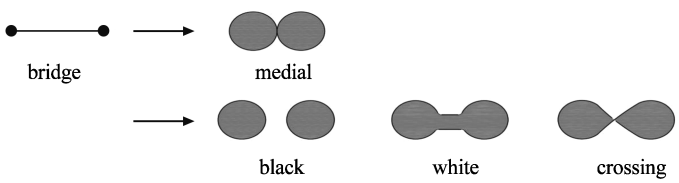
并且设 $W(p)=\prod_{e\in E} W(p(e))$。

定义 1 设连通平图 $G=(V,E,F)$,G 的中间图 $\tilde{G}=(\tilde{V},\tilde{E},\tilde{F})$,关于 W 权的 G 的 transition 多项式 $S(\tilde{G},W;\lambda)$ 为

$$S(\tilde{G},W;\lambda)=\sum_{p} W(p)\lambda^{c(p)},$$

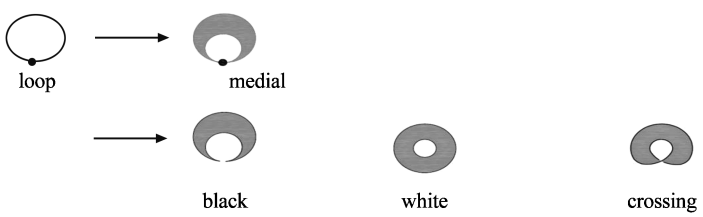
其中 $\sum$ 是对所有 transition system p 求和,$W(p)=\prod_{e\in E} W(p(e))$,$c(p)$ 为 transition system p 产生的欧拉圈的数目。

例 1 以下为一个最小的例子,即边数 $|E|=1$ 的情况。



$$S=\alpha\lambda^2+(\beta+\gamma)\lambda。$$

例 2 类似地,对于一个环



我们有 $S=\beta\lambda^2+(\alpha+\gamma)\lambda$。

定义 2 设连通平图 $G=(V,E,F)$,G 的中间图 $\tilde{G}=(\tilde{V},\tilde{E},\tilde{F})$,定义图 G 的 Penrose 多项式为

$$P(G;\lambda)=S(\tilde{G},W_{0,1,-1};\lambda)=\sum_{p}(-1)^{x(p)}\lambda^{c(p)},$$

其中 Σ 是对所有这样的 transition system p 求和,$x(p)$ 为 transition system p 下交叉型的数目。

Penrose 多项式是 transition 多项式的一种特殊情形,即当 $\alpha=0$(即无黑型),$\beta=1$,$\gamma=-1$ 的情形,因此,计算 transition 多项式的方法也适用于 Penrose 多项式的计算。此外,当 $x=y$ 时,平图的 Tutte 多项式是其中间图的 transition 多项式[2]。定向链环的投影图的 Kauffman 尖括号多项式是 transition 多项式的另外一个例子[3]。

文献[4]研究了经典链环投影图的尖括号多项式的计算方法,文献[5]将其推广到了虚拟链环,本文再将文献[5]中的计算方法进一步改进,得到了一种新的计算 transition 多项式的方法。算法使用了圈置换的方法去计算每个 transition system 所产生的欧拉圈的数目 $c(p)$。利用 Maple 软件编写出了该算法的程序,通过这个程序,可以实现任意一个平图的 transition 多项式和 Penrose 多项式的计算。

2 方法

将直接从带有经典黑白着色的中间图出发来考虑 transition 多项式的计算方法。考虑一个具有 N 个顶点的 4-正则图(图 2),在每个顶点放置一个小圆圈,小圆圈里没有任何其它交叉点。对小圆圈与图的边的交

点按如图 3 依顺时针方向递增进行标号。

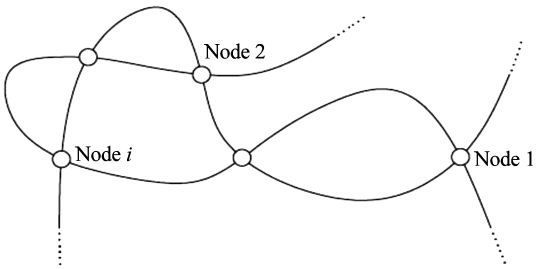


图 2　具有 N 个顶点的四正则图
Fig.2　4-regular graph with N vertexs

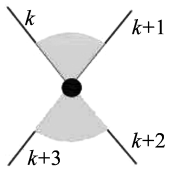


图 3　弧段端点的标号
Fig.3　Numbering end points of arcs

由于假设 4-正则图有 N 个顶点,因此在每个顶点放置一个小圆圈后有 $2N$ 条弧段且共有 $4N$ 个弧段的端点,对这些端点 1,2,3,…,$4N$ 进行标号。把集合$\{1,2,3,\cdots,4N\}$分成 $2N$ 个子集$\{A_1,A_2,A_3,\cdots,A_{2N}\}$,这里 $A_i=\{i_1,i_2\}$,并且 i_1、i_2 是一条弧段的 2 个端点的标号,其中 $i_2>i_1$。把上述情况写成数组形式,记为 $\boldsymbol{P}_1$。

$$P_1=\begin{pmatrix} 1_1 & 1_2 \\ 2_1 & 2_2 \\ \vdots & \vdots \\ (2N)_1 & (2N)_2 \end{pmatrix}。$$

注意到这个数组中,每个数$i_j\in\{1,2,3,\cdots,4N\}$,且这个集合里的每个数在这个数组中恰好出现一次。为了更好地叙述,给出一个具体的例子,如图 4 所示。

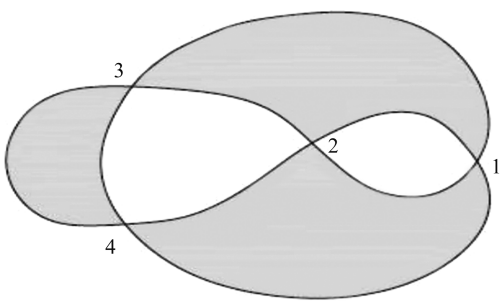
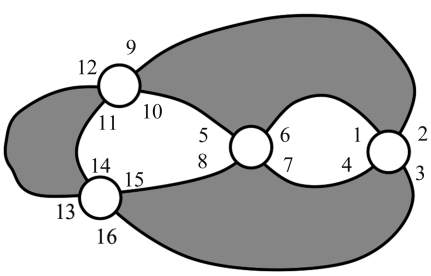


图 4　八字节投影图
Fig.4　The diagram of eight knots

按图 5(a)所示给图 4 进行标号,则 $\boldsymbol{P}_1$ 等于下列所示的数组(见图 5(b))。



(a)

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 9 \\ 3 & 16 \\ 4 & 7 \\ 5 & 10 \\ 8 & 15 \\ 11 & 14 \\ 12 & 13 \end{pmatrix}$$

(b)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \\ 5 & 6 \\ 8 & 7 \\ 9 & 10 \\ 12 & 11 \\ 13 & 14 \\ 16 & 15 \end{pmatrix}$$

(c)

图 5　八字节投影图的例子
Fig.5　The example of eight knots

另外,按顺时针的顺序从标号最小的开始标记逐个节点周围的端点,可以得到另外一个数组构成的 $2N\times2$阶矩阵,记为 $\boldsymbol{P}_2$。

$$\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & 3\\ 5 & 6\\ 8 & 7\\ \vdots & \vdots\\ 4N-3 & 4N-2\\ 4N & 4N-1\end{pmatrix}。$$

对应于图 5(a)的 $\boldsymbol{P}_2$(见图 5(c))。

在数组 $\boldsymbol{P}_2$ 中,1 连接 2,3 连接 4…,按这种方式,$\boldsymbol{P}_2$ 对应的就是全黑状态。如果对节点 1 选择白型操作,则需将 $\boldsymbol{P}_2$ 变为 $\boldsymbol{P}_2'$。

$$\boldsymbol{P}_2'=\begin{pmatrix}4 & 1\\ 3 & 2\\ 5 & 6\\ 8 & 7\\ \vdots & \vdots\\ 4N-3 & 4N-2\\ 4N & 4N-1\end{pmatrix}。$$

如果对节点 1 选择交叉型操作,则需将 $\boldsymbol{P}_2$ 变为 $\boldsymbol{P}_2''$

$$\boldsymbol{P}_2''=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 4 & 2\\ 5 & 6\\ 8 & 7\\ \vdots & \vdots\\ 4N-3 & 4N-2\\ 4N & 4N-1\end{pmatrix}。$$

一般来说,如果要在第 i 个节点由黑型变为白型,只需一个简单操作,即在 $\boldsymbol{P}_2$ 中把数组$\begin{pmatrix}4i-3 & 4i-2\\ 4i & 4i-1\end{pmatrix}$按顺时针方向旋转 90°,转变为$\begin{pmatrix}4i & 4i-3\\ 4i-1 & 4i-2\end{pmatrix}$。如果要在第 i 个节点由黑型变为交叉型,需将数组$\begin{pmatrix}4i-3 & 4i-2\\ 4i & 4i-1\end{pmatrix}$转变为$\begin{pmatrix}4i-3 & 4i-1\\ 4i & 4i-2\end{pmatrix}$。

假定数组 $\boldsymbol{P}_1$ 是固定的。给定一个 transition system 的 $\boldsymbol{P}_2$,从 $\boldsymbol{P}_1$ 开始选取 1_1,令 $\sigma(1_1)=1_2$,然后从 $\boldsymbol{P}_2$ 中找到 1_2,写 $\sigma(1_2)=l_2$。这里 l_2 是 $\boldsymbol{P}_2$ 中与 1_2 同一行的另一个数。再回到 $\boldsymbol{P}_1$,从 $\boldsymbol{P}_1$ 中找到 l_2,写 $\sigma(l_2)=k_2$,其中 k_2 为 $\boldsymbol{P}_1$ 中与 l_2 同一行的另外一个数,如此一直下去,可以获得集合$\{1,2,3,\cdots,4N\}$的一个置换 σ,这个置换的每个圈对应于这个 transition system p 下的一个圈,这个置换的圈数正好就是这个 transition system p 所产生的欧拉圈的数目 $c(p)$。以这种方式,可以获得 3^N 个置换 $\sigma_k(1\leqslant k\leqslant 3^N)$,而且每个置换对应 4-正则图的一个 transition system。

例 3 考虑八字节投影图结。(如图 5(a))。

选择八字结的其中两个 transition systems,如图 6 所示。

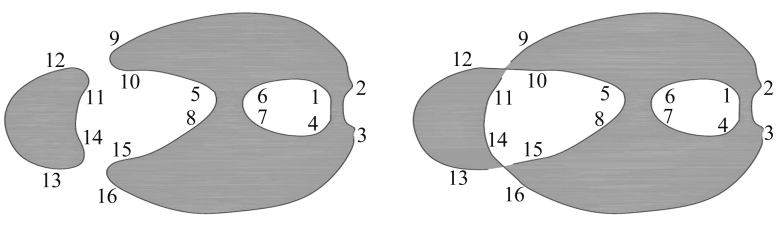


图 6 八字结的 2 个 transition systems

Fig.6 Two transition systems of the eight knots

对应于图 6(a)的 $\boldsymbol{P}_1$ 和 $\boldsymbol{P}_2$ 为:

$$\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix}1&6\\2&9\\3&16\\4&7\\5&10\\8&15\\11&14\\12&13\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix}4&1\\3&2\\8&5\\7&6\\9&10\\12&11\\13&14\\16&15\end{pmatrix}。$$

这个 transition system 对应的置换为

$$\begin{pmatrix}1&6&7&4&2&9&10&5&8&15&16&3&11&14&13&12\\6&7&4&1&9&10&5&8&15&16&3&2&14&13&12&11\end{pmatrix},$$

即置换 (1 6 7 4)(2 9 10 5 8 15 16 3)(11 14 13 12)。

对应于该 transition system 下的 3 个欧拉圈,见图 6(a),即在图 6(a)的 transition system 下,$c(p)=3$,并且这个 transition system 包含 2 个黑型和 2 个白型,因而与该 transition system 相应的 transition 多项式的项为 $\beta^2\alpha^2\lambda^3$。类似地,可以通过上面的方法得到对应于图 6(b)的数组 $\boldsymbol{P}_2'$,

$$\boldsymbol{P}_2'=\begin{pmatrix}4&1\\3&2\\8&5\\7&6\\9&11\\12&10\\13&15\\16&14\end{pmatrix}。$$

与这个其对应的置换为

$$\begin{pmatrix}1&6&7&4&2&9&11&14&16&3&5&10&12&13&15&8\\6&7&4&1&9&11&14&16&3&2&10&12&13&15&8&5\end{pmatrix},$$

即置换 (1 6 7 4)(2 9 11 14 16 3)(5 10 12 13 15 8)。

对应于该 transition system 下的 3 个欧拉圈,见图 6(b)。相应的 transition 多项式的项为 $\beta^2\gamma^2\lambda^3$。

显然,对于八字结来说有 3^4 种不同的 transition systems;因此若要手工绘制每个 transition system 是非常困难的,但借助于下面的 Maple 程序可以实现任意一个平图的 transition 多项式的计算。

3　程序

通过将第 2 节中求 $c(s)$的方法转换成求图的分支数用 Maple 软件编写了计算四正则图 Gr$\boldsymbol{P}$ 的 transition 多项式的程序。程序如下:

```
with(combinat, powerset):
with(GraphTheory):
TransitionPolynomial:=proc(P::Matrix, A::Matrix, B::Matrix, C::Matrix, N::integer)
localGrP,GrPQ,V,E,Nodes,TranPoly,Q,W,PSC,PSA,N1,N2,AA,AB,CC,α,β,γ,λ,a,c,d,i,j,k,
Comp;
GrP:=Graph(4N);
for i to 2N do
GrP:=AddEdge(GrP,{{P[i,1],P[i,2]}},inplace=true);
end do;
```

V:=Vertices(GrP);
E:=Edges(Grp);
Nodes:={ };
for i to N do
Nodes:=Nodes union{i};
end do;
TranPoly:=0;
$\boldsymbol{Q}$:=Matrix($2N$,2);
$\boldsymbol{W}$:=1;
PSC:=powerset(N);
PSC:=sort(PSC);
$N1$:=nops(PSC);
for j to $N1$ do
CC:=op(j,PSC);
c:=nops(CC);
$\boldsymbol{AB}$:=Nodes minus CC;
PSA:=powerset($\boldsymbol{AB}$);
PSA:=sort(PSA);
$N2$:=nops(PSA);
for k to $N2$ do
AA:=op(k,PSA);
a:=nops(AA);
w:=$w\cdot\alpha^{a}\cdot\beta^{N-a-c}\cdot\gamma^{c}$;
for i to N do
if $i\in$CC then
$\boldsymbol{Q}[2\cdot i-1,1]:=\boldsymbol{C}[2\cdot i-1,1]$;
$\boldsymbol{Q}[2\cdot i-1,2]:=\boldsymbol{C}[2\cdot i-1,2]$;
$\boldsymbol{Q}[2\cdot i,1]:=\boldsymbol{C}[2\cdot i,1]$;
$\boldsymbol{Q}[2\cdot i,2]:=\boldsymbol{C}[2\cdot i,2]$;
elif $i\in\boldsymbol{AA}$ then
$\boldsymbol{Q}[2\cdot i-1,1]:=\boldsymbol{A}[2\cdot i-1,1]$;
$\boldsymbol{Q}[2\cdot i-1,2]:=\boldsymbol{A}[2\cdot i-1,2]$;
$\boldsymbol{Q}[2\cdot i,1]:=\boldsymbol{A}[2\cdot i,1]$;
$\boldsymbol{Q}[2\cdot i,2]:=\boldsymbol{A}[2\cdot i,2]$;
else
$\boldsymbol{Q}[2\cdot i-1,1]:=\boldsymbol{B}[2\cdot i-1,1]$;
$\boldsymbol{Q}[2\cdot i-1,2]:=\boldsymbol{B}[2\cdot i-1,2]$;
$\boldsymbol{Q}[2\cdot i,1]:=\boldsymbol{B}[2\cdot i,1]$;
$\boldsymbol{Q}[2\cdot i,2]:=\boldsymbol{B}[2\cdot i,2]$;
end if;
end do;

```
for i to 2N do
E:E union{{Q[i,1], Q[i,2]}};
end do;
GrPQ:=Graph(V,E);
Comp:=ConnectedComponents(GrPQ);
d:=nops(Comp);
TranPoly:=TranPoly+w·λ^d;
W:=1;
E:=Edges(GrP);
end do;
end do;
expand(TranPoly);
end proc
```

程序中输入的 4 个参数 $\boldsymbol{P}$、$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、N 的解释如下:数组 $\boldsymbol{P}$ 表示上文中的数组 $\boldsymbol{P}_1$,矩阵 $\boldsymbol{A}$ 表示全黑型状态下的数组 $\boldsymbol{P}_2$,矩阵 $\boldsymbol{B}$ 表示全白型状态下的数组,矩阵 $\boldsymbol{C}$ 表全交叉型状态下的数组,N 表示所有图中节点的数目。

程序中几个重要变量的解释如下:矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 的初始值是 $2N\times 2$ 阶零矩阵,通过将第 i 个节点的状态值赋给矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 的 4 个元素 $\boldsymbol{Q}[2i-1,1]$、$\boldsymbol{Q}[2i-1,2]$、$\boldsymbol{Q}[2i,1]$、$\boldsymbol{Q}[2i,2]$。若第 i 个节点的状态是黑型,则将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 相应的 4 个元素赋给矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 的 4 个元素;若第 i 个节点的状态是白型,则将矩阵 $\boldsymbol{B}$ 相应的 4 个元素赋给矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 的 4 个元素;若第 i 个节点的状态是交叉型,则将矩阵 $\boldsymbol{C}$ 相应的 4 个元素赋给矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 的 4 个元素;从而矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 表示四正则图的一种 transition system,即同上文中的数组 $\boldsymbol{P'}_2$。程序中数组 $\boldsymbol{P}$ 的每一行看成图 Gr$\boldsymbol{P}$ 的一条边,矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 的每一行表示在相应状态下小圆圈中的一段弧,将 $\boldsymbol{Q}$ 中的所有弧段当作边加入到图 Gr$\boldsymbol{P}$ 中得到的新图记做图 Gr$\boldsymbol{PQ}$,通过命令 ConnectedComponents(Gr$\boldsymbol{PQ}$)求出图 Gr$\boldsymbol{PQ}$ 中的连通分支 Comp,即上文中由数组 $\boldsymbol{P}_1$ 和 $\boldsymbol{P}'_2$所得到的置换的圈分解。连通分支数记做 c,即置换中圈的数目。根据 transition 多项式的计算公式,对每个 transition system 对应的 $W\cdot\lambda^d$ 进行求和,其中 W 表示 $\alpha^a\cdot\beta^{w-a-c}\gamma^c$,$d$ 表示欧拉圈的数目,a、c 分别表示 transition system 中黑型、交叉型的数目。

4　实例

例 4　根据 Maple 程序求图 4 的 transition 多项式。

输入:

```
Transition Polynomial(Matrix([[1,6],[2,9],[3,16],[4,7],[5,10],[8,15],[11,14],[12,13]]),
    Matrix ([[1,2],[4,3],[6,5],[7,8],[9,10],[12,11],[14,13],[15,16]]),
    Matrix ([[4,1],[3,2],[8,5],[7,6],[9,12],[10,11],[16,13],[15,14]]),
    Matrix ([[1,3],[2,4],[5,7],[6,8],[9,11],[10,12],[13,15],[14,16]]),4);
```

输出:

$$\begin{aligned}&\beta^4\lambda^3+4\alpha\beta^3\lambda^2+5\alpha^2\beta^2\lambda+\alpha^2\beta^2\lambda^3+4\alpha^3\beta\lambda^2+\alpha^4\lambda^3\\&+4\beta^3\gamma\lambda^2+10\alpha\beta^2\gamma\lambda+10\alpha^2\beta\gamma\lambda+2\alpha^2\beta\gamma\lambda^2+4\alpha^3\gamma\lambda^2\\&+2\alpha\beta^2\gamma\lambda^2+5\beta^2\gamma^2\lambda+8\alpha\beta\gamma^2\lambda^2+\alpha^2\gamma^2\lambda^3+4\alpha\beta\gamma^2\lambda\\&+5\alpha^2\gamma^2\lambda+\beta^2\gamma^2\lambda^3+2\beta\gamma^3\lambda+2\alpha\gamma^3\lambda^2+2\beta\gamma^3\lambda^2+2\alpha\gamma^3\lambda+\gamma^4\lambda\end{aligned}$$

例 5　根据 Maple 程序求图 7 的 transition 多项式和 Penrose 多项式。

输入:

```
Transition Polynomial(Matrix([[1,6],[2,9],[3,16],[4,27],[5,10],[7,18],[8,11],[12,13],
    [14,21],[15,28],[17,22],[19,20],[23,26],[24,25]]),
    Matrix([[1,2],[4,3],[5,6],[8,7],[9,10],[12,11], [13,14],[16,15],[17,18],[20,19],
```

[21,22],[24,23],[25,26],[28,27]]),

Matrix([[4,1],[3,2],[8,5],[7,6],[12,9],[11,10],[16,13],[15,14],[20,17],[19,18],[24,21],[23,22],[28,25],[27,26]]),

Matrix ([[1,3],[2,4],[5,7],[6,8],[9,11],[10,12],[13,15],[14,16],[17,19],[18,20],[21,23],[22,24],[25,27],[26,28]]),7);

输出:

$$104\alpha^2\beta^3\gamma^2\lambda^2+14\alpha^2\beta^3\gamma^2\lambda^4+80\alpha^2\beta^3\gamma^2\lambda+65\alpha^3\beta^2\gamma^2\lambda^3+78\alpha^3\beta^2\gamma^2\lambda+66\alpha^3\beta^2\gamma^2\lambda^2$$
$$+81\alpha^4\beta\gamma^2\lambda^2+14\alpha^4\beta\gamma^2\lambda^4+10\alpha^4\beta\gamma^2\lambda^3+3\alpha^4\gamma^3\lambda^3+\beta^4\gamma^3\lambda^4+\beta^6\gamma\lambda^4+14\beta^5\gamma^2\lambda^2$$
$$+31\alpha^2\beta^4\gamma\lambda^2+39\alpha^2\beta^4\gamma\lambda+32\alpha^2\beta^4\gamma\lambda^3+52\alpha^3\beta^3\gamma\lambda+28\alpha^3\beta^3\gamma\lambda^3+56\alpha^3\beta^3\gamma\lambda^2$$
$$+4\alpha^3\beta^3\gamma\lambda^4+81\alpha^4\beta^2\gamma\lambda^2+19\alpha^4\beta^2\gamma\lambda^3+5\alpha^4\beta^2\gamma\lambda^4+40\alpha^5\beta\gamma\lambda^3+2\alpha^5\beta\gamma\lambda^4+32\alpha^2\beta\gamma^4\lambda$$
$$+6\alpha^2\beta\gamma^4\lambda^3+15\alpha\beta^2\gamma^4\lambda^3+5\alpha^2\beta\gamma^4\lambda^4+5\alpha^4\gamma^3\lambda^4+13\beta^4\gamma^3\lambda+36\alpha^3\beta\gamma^3\lambda^2+2\alpha^3\beta\gamma^3\lambda^4$$
$$+52\alpha^3\beta\gamma^3\lambda+3\alpha^2\beta^2\gamma^3\lambda^4+4\alpha\beta^3\gamma^3\lambda^4+24\alpha\beta\gamma^5\lambda+8\alpha\beta\gamma^5\lambda^3+20\beta^3\gamma^4\lambda+3\beta\gamma^6\lambda^2$$
$$+3\alpha\gamma^6\lambda+4\beta\gamma^6\lambda+4\alpha\gamma^6\lambda^2+6\beta^5\gamma^2\lambda^3+13\alpha^3\gamma^4\lambda+\alpha^7\lambda^5+10\alpha\beta\gamma^5\lambda^2+6\beta^6\gamma\lambda^3$$
$$+\alpha^5\gamma^2\lambda^5+21\alpha^3\beta^4\lambda^3+13\alpha^3\beta^4\lambda+8\alpha\beta^5\gamma\lambda^3+3\alpha^2\beta^4\gamma\lambda^4+10\alpha^3\gamma^4\lambda^2+\beta^5\gamma^2\lambda^4+\alpha\beta^4\gamma^2\lambda^5$$
$$+\alpha^3\beta^2\gamma^2\lambda^5+36\alpha\beta^4\gamma^2\lambda^2+12\alpha^2\beta^3\gamma^2\lambda^3+\alpha^5\beta^2\lambda^5+7\alpha^6\beta\lambda^4+28\alpha\beta^5\gamma\lambda^2+6\alpha\beta^5\gamma\lambda^4+17\beta^4\gamma^3\lambda^2$$
$$+12\alpha^3\gamma^4\lambda^3+11\beta^3\gamma^4\lambda^2+27\alpha^4\gamma^3\lambda^2+\gamma^7\lambda+10\beta^2\gamma^5\lambda+11\alpha^2\gamma^5\lambda^2+11\beta^2\gamma^5\lambda^2+6\alpha\beta^6\lambda^3$$
$$+\alpha\beta^6\lambda^5+14\alpha^2\beta^5\lambda^2+20\alpha^5\gamma^2\lambda^3+7\alpha^2\beta^5\lambda^4+4\beta^4\gamma^3\lambda^3+7\alpha^2\gamma^5\lambda+3\alpha^2\gamma^5\lambda^3+64\alpha\beta^3\gamma^3\lambda$$
$$+18\alpha\beta^3\gamma^3\lambda^3+106\alpha^2\beta^2\gamma^3\lambda^2+50\alpha^3\beta\gamma^3\lambda^3+54\alpha\beta^3\gamma^3\lambda^2+35\alpha^2\beta^2\gamma^3\lambda^3+66\alpha^2\beta^2\gamma^3\lambda+44\alpha\beta^2\gamma^4\lambda^2$$
$$+46\alpha\beta^2\gamma^4\lambda+62\alpha^2\beta\gamma^4\lambda^2+20\alpha^5\beta^2\lambda^3+7\alpha^6\gamma\lambda^4+\beta^7\lambda^4+39\alpha\beta^4\gamma^2\lambda+29\alpha\beta^4\gamma^2\lambda^3$$
$$+\alpha^3\beta^4\lambda^5+27\alpha^4\beta^3\lambda^2+8\alpha^4\beta^3\lambda^4+4\beta^3\gamma^4\lambda^3$$

$$P(G;\lambda)=S(\widetilde{G},W_{0,1,-1};\lambda)=0$$

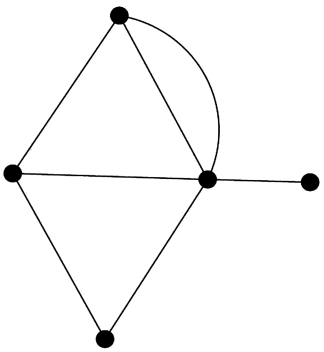


图 7 胞腔嵌入图 $G\subset S^2$

Fig.7 Cellularly embedded graph $G\subset S^2$

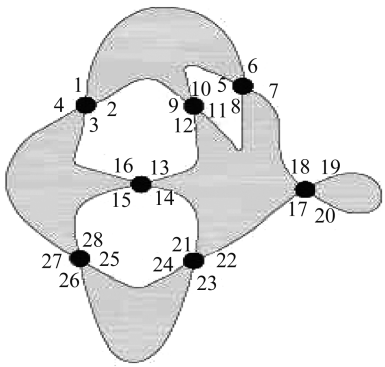


图 8 中间图的经典棋盘着色

Fig.8 Canonically checkerboard colored of medial graph

参考文献:

[1] JAEGER F. On transition polynomials of 4-regular graphs[M]. Berlin: Springer Netherlands, 1990:123-150.

[2] TUTTE W T. A ring in graph theory[J]. Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 1947, 43(1):26-40.

[3] KAUFFMAN L H. New invariants in the theory of knots[J]. Mathematical Association of America, 1988, 95(3):195-242.

[4] ITIK M, BANKS S P. On the calculation of the Kauffman bracket polynomial[J]. Applied Mathematics & Computation, 2010, 216(2):655-661.

[5] 李美莲,邓青英.虚拟链环的 Kauffman 尖括号多项式的 Maple 计算[J].厦门大学学报(自然科学版),2015,54(2):233-237.

LI Meilian, DENG Qingying. The Maple calculation of the Kauffman bracket polynomial of virtual link[J]. Journal of Xiamen University(Natural Science), 2015, 54(2):233-237.

(编辑:祁业卿)