文章编号:1671-9352(2017)12-0016-09 DOI:10.6040/j.issn.1671-9352.0.2017.153

诣零 *-clean 环

汪慧星,崔建*,陈怡宁
(安徽师范大学数学计算机科学学院, 安徽 芜湖 241003)

摘要:介绍了诣零 *-clean 环和唯一诣零 *-clean 环的概念, 研究了这些环的基本性质和扩张性质,并讨论了几类 *-环的关系。

关键词:诣零 clean 环;诣零 *-clean 环; 唯一诣零 *-clean 环; *-clean 环
中图分类号:O153.3 **文献标志码**:A
引用格式:汪慧星,崔建,陈怡宁.诣零 *-clean 环[J]. 山东大学学报(理学版),2017,52(12):16-24.

Nil *-clean rings

WANG Hui-xing, CUI Jian*, CHEN Yi-ning
(College of Mathematics and Computer Science, Anhui Normal University, Wuhu 241003, Anhui, China)

Abstract: The concepts of nil *-clean rings and uniquely nil *-clean rings are introduced. Basic properties and extension properties of such rings are investigated. Moreover, the relations of several classes of *-rings are discussed.

Key words: nil clean ring; nil *-clean ring; uniquely nil *-clean ring; *-clean ring

0 引言

文中的环都是指含单位元的结合环。clean 环的概念首次由 Nicholson 在文[1]中提出。称环 R 中的元素 x 是 clean 的,若 x 能写成幂等元和可逆元的和;称环 R 是 clean 环,若 R 中每一个元素都是 clean 的。clean 环引起众多环论学者关注[2-3]。2013 年,Diesl[4]在环的 clean 性研究基础上引入(强)诣零 clean 环。称环 R 中的元素 x 是诣零 clean 的,若存在 R 中幂等元 e 和幂零元 n 使得 $x=e+n$;特别地,若 $en=ne$,则 x 是强诣零 clean 元;称环 R 是(强)诣零 clean 环,若 R 中所有元素都是(强)诣零 clean 的。同时,Diesl 在文[4]中还提出了唯一诣零 clean 环的概念。称环 R 是唯一诣零 clean 环,若对 R 中任意元素 x,都存在唯一的幂等元 $e\in R$ 使得 $x-e$ 是幂零的。唯一诣零 clean 环是强诣零 clean 环,强诣零 clean 环是诣零 clean 环,诣零 clean 环是 clean 环。随后,许多环论学者对(强)诣零 clean 环进行了深入研究[5-7]。

称环 R 为 *-环,若存在映射 $*:R\to R$ 使得对所有的 $x,y\in R$,均满足

$$(x+y)^*=x^*+y^*,\ (xy)^*=y^*x^*\text{ 且 }(x^*)^*=x。$$

称 *-环 R 中的元素 p 是投射元,若 $p^2=p=p^*$。2010 年,Vaš 引入了(强) *-clean 环的概念[8]。称 *-环 R 中的元素是(强) *-clean 的,如果它能表示成一个投射元和一个可逆元(可交换)的和;称环 R 是(强) *-clean 环,若 R 中所有元素都是(强) *-clean 的。显然, *-clean 环是 clean 的,强 *-clean 环是强 clean 的。Chen[9]和 Ungor et al.[10]分别引入并研究了强诣零 *-clean 环;称 *-环 R 是强诣零 *-clean 环,若 R 中每一个元素都

收稿日期:2017-04-12; **网络出版时间**:2017-09-07 14:29:21
网络出版地址:http://kns.cnki.net/kcms/detail/37.1389.N.20170907.1429.008.html
基金项目:国家自然科学基金青年科学基金资助项目(11401009); 安徽省自然科学基金青年项目(1408085QA01); 安徽省高校省级自然科学研究重点项目(KJ2014A082)
作者简介:汪慧星(1991—), 女, 硕士研究生, 研究方向为环论. E-mail:749908638@qq.com
*通讯作者:崔建(1984—), 男, 博士, 副教授, 研究方向为环论. E-mail:cui368@ahnu.edu.cn

是可交换的投射元和幂零元的和。

受上述研究启发,本文引入了(唯一)诣零 *-clean 环。称 *-环 R 中的元素 a 是(唯一)诣零 *-clean 的,若存在(唯一的)投射元 p 和幂零元 b 使得 $a=p+b$,其中 $a=p+b$ 也称为 a 的(唯一)诣零 *-clean 分解;称 *-环 R 是(唯一)诣零 *-clean 环,若 R 中每个元素都是(唯一)诣零 *-clean 的。本文证明了强诣零 *-clean 环是唯一诣零 *-clean 的,唯一诣零 *-clean 环是诣零 *-clean 的,而诣零 *-clean 环是诣零 clean 的。同时给出了这几类诣零 *-clean 环的例子,研究了它们的基本性质和扩张性质,并探讨了诣零 clean 环类和诣零 *-clean环类的关系。

环 R 中所有投射元,幂零元,幂等元和可逆元组成的集合分别记为 $P(R)$,$N(R)$,$\mathrm{Id}(R)$ 和 $U(R)$。令 $\mathrm{J}(R)$ 是环 R 的 Jacobson 根。记 $M_n(R)$ 是环 R 上的 n 阶矩阵环,$T_n(R)$ 是环 R 上的 n 阶上三角矩阵环且记 $\mathbf{Z}_n$ 是整数环 $\mathbf{Z}$ 模 n 的剩余类环。

1　诣零 *-clean 环

首先给出诣零 *-clean 环的概念。

定义 1.1　设 R 是 *-环。称元素 $a\in R$ 是诣零 *-clean 的,若 $a=p+b$ 其中 $p\in P(R)$ 且 $b\in N(R)$。称 *-环 R 是诣零 *-clean 环,若 R 中所有元素都是诣零 *-clean 的。

显然地,诣零 *-clean 环是诣零 clean 环。下例说明反之未必成立。

例 1.1　设环 $R=T_2(\mathbf{Z}_2)$ 是 $\mathbf{Z}_2$ 上的 2 阶上三角矩阵环。定义 $*:R\to R$ 为 $\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & c\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}c & b\\ 0 & a\end{pmatrix}$。则有:

(1) R 是(强)诣零 clean *-环;

(2) R 不是诣零 *-clean 环。

证明　(1) 显然,映射 $*:\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & c\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}c & b\\ 0 & a\end{pmatrix}$ 是 R 的对合运算。因此 R 是 *-环。根据[4]定理 4.1,R 是强诣零 clean 环。

(2) 假设 R 是诣零 *-clean 环。给定任意的 $a\in R$,存在 $p\in P(R)$ 和 $b\in N(R)$ 使得 $a=p+b$。因为 $N(R)=\left\{\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right\}$,所以对所有的 $b\in N(R)$,$b^*=b$。从而 $a^*=(p+b)^*=p^*+b^*=a$。即有 $*=1_R$ 为 R 的单位映射,从而 R 是交换环,矛盾。

命题 1.1　设 R 是 *-环,$u\in U(R)$ 且元素 $a\in R$ 是诣零 *-clean 的。若 $u^*=u^{-1}$,则 $u^{-1}au$ 是诣零 *-clean 元素。

证明　令 $a=p+b$ 是诣零 *-clean 的,其中 $p\in P(R)$,$b\in N(R)$。设存在正整数 m 使得 $b^m=0$。则 $(u^{-1}pu)^2=u^{-1}pu$ 且 $(u^{-1}bu)^m=u^{-1}b^mu=0$,从而 $u^{-1}au=u^{-1}pu+u^{-1}bu$ 是诣零 clean 元。又因为 $u^*=u^{-1}$,所以 $(u^{-1}pu)^*=u^*p(u^{-1})^*=u^{-1}p(u^*)^*=u^{-1}pu$。因此元素 $u^{-1}au$ 是诣零 *-clean 的。

命题 1.2　设 R 是 *-环,则有:

(1) 若 R 是诣零 *-clean 环,则 R 的中心幂等元都是投射元;

(2) 若 $\gamma\in\mathrm{J}(R)$,且 $\gamma=p+b$ 为诣零 *-clean 分解,其中 $p\in P(R)$,$b\in N(R)$。则 $p=0$。

证明　(1) 令 $e\in R$ 是环 R 的中心幂等元。因为 R 是诣零 *-clean 的,所以存在 $q\in P(R)$ 和 $n\in N(R)$ 使得 $e=q+n$。假设 $n\neq 0$ 且 k 是使得 $n^k=0$ 的最小整数。由 $e^2=e$ 且 e 是中心的可得 $(1-2q)n=n^2$。因此,$(1-2q)n^{k-1}=n^k=0$。由于 $(1-2q)^2=1$,故 $1-2q\in U(R)$。从而得到 $n^{k-1}=0$,矛盾。从而 $n=0$,故 $e=q$ 是投射元,得证。

(2) 假设存在正整数 l 使得 $b^l=0$。则由假设,$p=p^l=(\gamma-b)^l\in\mathrm{J}(R)$。从而得到 $p=0$。

称 *-环 R 是 *-阿贝尔的,如果 R 中每个投射元都是中心的(见[8])。根据[5]定理 2.1,元素 $a\in R$ 是强诣零 clean 的当且仅当 a 是 R 中的强 clean 元且 $a-a^2$ 是幂零元。对于诣零 *-clean 环,有类似的结论。

命题 1.3　设 R 是 *-阿贝尔环且 $a\in R$。则 a 是 R 中的诣零 *-clean 元当且仅当 a 是 *-clean 的且 $a-a^2$

是幂零元。

证明 "⇒"。令 $a\in R$ 是诣零 $*$-clean 元。则存在 $p\in P(R)$ 和 $b\in N(R)$ 使得 $a=p+b$。因为 R 是 $*$-阿贝尔的,所以 $a=(1-p)+(2p-1+b)$,其中 $(1-p)^2=1-p=(1-p)^*$, $2p-1+b=(2p-1)(1+(2p-1)b)\in U(R)$。因此 a 是 R 中的 $*$-clean 元。而且,$a-a^2=p+b-(p^2+2pb+b^2)=(1-2p-b)b$ 是幂零元。

"⇐"。假设元素 a 是 $*$-clean 的且 $a-a^2\in N(R)$。令 $a=p+u$ 满足 $p^2=p=p^*$ 且 $u\in U(R)$。因为 R 是 $*$-阿贝尔环,故 $a^2=p+2pu+u^2$ 且 $a-a^2=(1-2p-u)u\in N(R)$。从而由 $u\in U(R)$ 知 $1-2p-u\in N(R)$。因此,$a=(1-p)+(-1+2p+u)$ 是 R 中的诣零 $*$-clean 元。

注 1.1 在命题 1.3 中,条件"R 是 $*$-阿贝尔环"是不可缺少的。令 $R=M_2(\mathbf{Z})$,定义其对合运算 $*:R\to R$ 为 $\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$,其中 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 为 $\boldsymbol{A}\in R$ 的转置。取 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1\\1&0\end{pmatrix}$,则 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&-1\\1&-1\end{pmatrix}$ 是 R 中的诣零 $*$-clean 分解。但 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\in U(R)$。事实上,注意到 $\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$ 不是中心的,所以 R 不是 $*$-阿贝尔环。

易证,若 $*$-环 R 满足每个幂零元都是自伴随的(即对任意的 $b\in N(R)$,满足 $b^*=b$),则 R 是诣零 $*$-clean环当且仅当 R 是诣零 clean 的且 $\mathrm{Id}(R)=P(R)$。因此有下面结论。

命题 1.4 设 R 是布尔 $*$-环。则 R 是诣零 $*$-clean 环当且仅当 $*=1_R$ 是 R 的单位映射。特别地,$R=\mathbf{Z}_2\oplus\mathbf{Z}_2$ 满足 $(a,b)^*=(b,a)$ 是诣零 clean 环但不是诣零 $*$-clean 的。

证明 显然,0 是布尔环中唯一的幂零元且 $0^*=0$。故对任意的 $a\in R$, $a=p+n$ 其中 $p\in P(R)$ 且 $n\in N(R)=0$。所以 $a^*=a$,即 $*=1_R$。反之显然。

称环 R 中元素 a 是 unipotent 的,若 $a-1\in N(R)$(见[4])。

命题 1.5 每个诣零 $*$-clean 环都是 $*$-clean 的,若环中每个可逆元都是 unipotent 的,则逆命题也成立。

证明 设 R 是诣零 $*$-clean 环且 $r\in R$。令 $r-1=p+b$,其中 $p\in P(R)$, $b\in N(R)$。因为 $1+b\in U(R)$,所以 $r=p+(1+b)$ 是 $*$-clean 的。反之,假设 R 是 $*$-clean 环且 R 中每个可逆元都是 unipotent 的。取 $a\in R$,则存在投射元 $q\in R$ 和可逆元 $u\in R$ 使得 $a+1=q+u$。因为 u 是 unipotent 的,所以存在 $n\in N(R)$ 使得 $u=1+n$。因此,$a=q+n$ 是诣零 $*$-clean 的,即证。

注 1.2 设 $R=\mathbf{Z}_{2^n}$,其中 $n\geqslant 1$ 且 $*=1_R$。容易验证 R 是 $*$-clean 环且 R 中每个可逆元都是 unipotent 的。故由命题 1.5 知,R 是诣零 $*$-clean 环。

然而,一般情况下,命题 1.5 的逆命题是不正确的。取素数 $p\geqslant 3$ 及正整数 $n\geqslant 1$,则环 $R=\mathbf{Z}_{p^n}$ 满足 $*=1_R$ 时是 $*$-clean 的。但由于 $2\in U(R)$,即 $2\notin N(R)$,所以根据[4]命题 3.14,R 不是诣零 clean 环,从而不是诣零 $*$-clean 环。实际上,注意到 2-1 不是幂零元(即 2 不是 unipotent 的)。

设 I 是 $*$-环 R 的理想。称 I 是 $*$-不变的,若 $I^*\subseteq I$。在这种情况下,R 中的对合运算 $*$ 可以延拓到商环 R/I 上,仍记为 $*$。

引理 1.1 设 R 是诣零 $*$-clean 环。若 I 是 R 的 $*$-不变理想,则 R/I 是诣零 $*$-clean 环。

证明 因为投射元的同态象(或者,幂零元)是投射元(或者,幂零元),命题得证。

命题 1.6 设 R 是诣零 $*$-clean 环,则有:

(1) $R/\mathrm{J}(R)$ 是诣零 $*$-clean 环;

(2) 若 $N(R)$ 是理想,则 $R/N(R)$ 是诣零 $*$-clean 环。

证明 (1) 结合引理 1.1,只需证明 $\mathrm{J}(R)$ 是 $*$-不变的。令 $x^*\in\mathrm{J}(R)^*$ 其中 $x\in\mathrm{J}(R)$。对任意的 $y\in R$,因为 $1-xy^*\in U(R)$,所以 $1-yx^*=(1-xy^*)^*\in U(R)$,得证。

(2) 根据假设,只需证明 $N(R)$ 是 $*$-不变的。给定任意的 $a^*\in N(R)^*$,下证 $a^*\in N(R)$。因为 $a\in N(R)$,得到 $a^m=0$,其中整数 $m\geqslant 1$。则 $(a^*)^m=(a^m)^*=0$,故 $a^*\in N(R)$。余下部分可由引理 1.1 得到。

命题 1.7 设 I 是 $*$-环 R 的任意诣零 $*$-不变理想且 R/I 中的投射元可提升到 R 中。则 R 是诣零 $*$-clean 环当且仅当 R/I 是诣零 $*$-clean 的。

证明 根据引理 1.1,必要性是显然的。反之,令 $x\in R$。记 $\bar{x}=x+I\in R/I$。则存在投射元 $\bar{p}$ 和幂零元 $\bar{b}$ 使得 $\bar{x}=\bar{p}+\bar{b}$。因为 R/I 中的投射元可提升到 R 上,所以可假设 $p^2=p=p^*\in R$。由于 $\bar{b}\in N(R/I)$,故 $\overline{b^m}=\overline{b}^m=$

$\bar{0}$对某个正整数 m 成立。从而$b^m \in I$。记 $x-p=b+i$,其中 $i \in I$。注意到 I 是诣零的,故$(b+i)^m \in I$ 是幂零的。因此,$x=p+(b+i)$满足 $p \in P(R)$和 $b+i \in N(R)$是诣零 *-clean 元。即证 R 是诣零 *-clean 环。

设 R 是 *-环,令 I 是 R 的 *-不变理想。称 I 是(强)诣零 *-clean 的,如果 I 中每个元素都能表示成 I 中投射元与幂零元的和且二者可交换。

引理 1.2　设 I 是 *-环 R 的 *-不变理想,$a \in I$。则 a 是 I 中的强诣零 *-clean 元当且仅当 a 是 R 中的强诣零 *-clean 元。

证明　必要性是显然的。令 $a=p+b$ 是 R 中的强诣零 *-clean 元素,其中 $p \in P(R)$, $b \in N(R)$,且 $pb=bp$。则 $a=(1-p)+(2p-1+b)$是 R 中的强 *-clean 元。故 $ap=(2p-1+b)p$。因为 I 是 R 的理想,所以$p=(2p-1+b)^{-1}ap \in I$。从而 $b=a-p \in I$,即 $a=p+b$ 是 I 中的强诣零 *-clean 元。

推论 1.1　设 I 是 *-环 R 的 *-不变理想,且 R 是强诣零 *-clean 环,则 I 是强诣零 *-clean 的,特别地,$\mathrm{J}(R)$是强诣零 *-clean 的。

设 R 是 *-环且 $Z(R)$是 R 的中心。易证 $Z(R)$也是 *-环。

定理 1.1　设 R 是诣零 *-clean 环,则 $Z(R)$是强诣零 *-clean 的。

证明　假设 R 是诣零 *-clean 环,给定 $a \in Z(R)$,则存在 $p \in P(R)$和 $b \in N(R)$使得 $a=p+b$。因此$a(1-p)=b(1-p)$且 $pb=bp$。故 $a^l(1-p)=b^l(1-p)=0$ 对某个正整数 $l \geqslant 1$ 成立(由于 b 是幂零的)。又因 $pa=p+pb=p(1+b)$,所以 $p=pa(1+b)^{-1}=p(1+b)^{-1}a \in Ra$。而 p 是幂等元,从而对任意整数 $k \geqslant 1$,有 $p \in Ra^k$。记 $p=ta^l=a^lt$,下证 $p \in Z(R)$。取任意的 $y \in R$,有 $py(1-p)=ta^ly(1-p)=tya^l(1-p)=0$ 且$(1-p)yp=(1-p)ya^lt=a^l(1-p)yt=0$。因此有 $py=pyp=yp$。从而 $p \in Z(R)$,且 $b=a-p \in Z(R)$。这就证明了 $Z(R)$是强诣零 *-clean 环。

引理 1.3[9,推论2.5]　设 R 是 *-环,则 R 是强诣零 *-clean 的当且仅当 R 中每个幂等元都是投射元且对任意的 $a \in R$, $a-a^2 \in N(R)$。

命题 1.8　设 R 是强诣零 *-clean 环,则 R 的任意 *-不变子环 S 是强诣零 *-clean 的。

证明　对任意的 $e^2=e \in S \subseteq R$,由引理 1.3 知 $e^*=e$,即 S 中幂等元均为投射元。取 $a \in S$,则 $a \in R$。根据引理 1.3,存在正整数 n 使得$(a-a^2)^n=0$,则 $a-a^2 \in N(S)$。所以,再由引理 1.3,S 是强诣零 *-clean 环。

推论 1.2　强诣零 *-clean 环的任意有限子直积是强诣零 *-clean 环。

证明　设 R 是强诣零 *-clean 环 $R_1,\cdots,R_n$ 的子直积,则 R 同构于 $R_1\times\cdots\times R_n$ 的子环。故由命题 1.8 知,R 是强诣零 *-clean 环。

设 $R=\prod_{i\in I}R_i$ 是环 $R_i(i \in I)$的直积,且 $*_i: R_i \to R_i$ 是 R_i 的对合运算。定义对合运算 $*: R \to R$ 为$(\alpha_i)_{i\in I} \mapsto (\alpha_i^{*_i})_{i\in I}$,则 R 也是 *-环。

命题 1.9　设 R_i 是 *-环,$i \in I$,则有限直积 $R=\prod_{i\in I}R_i$ 是诣零 *-clean 环当且仅当每一个环 R_i 是诣零 *-clean的。

证明　假设每个环 R_i 是诣零 *-clean 的,$i \in I$。令 $\alpha=(\alpha_i) \in \prod_{i\in I}R_i$。对任意固定的 i, $\alpha_i=p_i+b_i$,其中 $p_i \in P(R_i)$, $b_i \in N(R_i)$。则 $\alpha=p+b$ 满足 $p=(p_i) \in P(\prod_{i\in I}R_i)$且 $b=(b_i) \in N(\prod_{i\in I}R_i)$。从而即证环 $R=\prod_{i\in I}R_i$ 是诣零 *-clean 的。必要性可由引理 1.1 得到。

由命题 1.9,立即得到下面结论。

推论 1.3　设 R 是 *-环且 f 是 R 的中心投射元,则环 R 是诣零 *-clean 的当且仅当 fRf 和$(1-f)R(1-f)$都是诣零 *-clean 环。

注 1.3　存在诣零 *-clean 环的无限直积不是诣零 *-clean 环。令 $R=R_1\times R_2\times R_3\times\cdots$其中 $R_i=\mathbf{Z}_{2^i}$,且 $*=1_{R_i}$是 R_i 的单位映射。容易验证每一个环 R_i 是诣零 *-clean 的。然而,R 不是诣零 *-clean 环。实际上,取$\gamma=(\gamma_i)=(0,\bar{2},\bar{2},\bar{2},\cdots) \in R$。注意到 γ 不是幂零的且 $\gamma \in \mathrm{J}(R)$。若 γ 是诣零 *-clean 的,则由命题 1.2 知,$\gamma \in N(R)$,矛盾。因此 γ 不是诣零 *-clean 元。

命题 1.10　设 R 是 *-环,则下述等价:

(1) R 是诣零 $*$-clean 环且 0,1 是 R 中仅有的投射元;

(2) R 是诣零 clean 环且 0,1 是 R 中仅有的幂等元;

(3) $\mathrm{J}(R)$是诣零的且 $R/\mathrm{J}(R)\cong\mathbf{Z}_2$。

证明 (1)⇒(2)。只需证明 R 中仅有的幂等元是 0 和 1。令 $e^2=e\in R$,由假设,$e=p+b$ 其中 $p\in P(R)=\{0,1\}$ 且 $b\in N(R)$。若 $p=0$,则 $e=b$ 是幂零元,因此 $e=0$。若 $p=1$,则 $1-e=-b\in N(R)$,因此$e=1$。得证。

(2)⇒(3)可由[4]命题 3.24 得到。

(3)⇒(1)。假设 $\mathrm{J}(R)$是诣零的且 $R/\mathrm{J}(R)\cong\mathbf{Z}_2$,则 R 是局部环且 $R=\mathrm{J}(R)\cup(1-\mathrm{J}(R))$。给定任意的 $a\in R$,则 $a\in\mathrm{J}(R)$或者 $a\in 1-\mathrm{J}(R)$。若 $a\in\mathrm{J}(R)$,则 $a\in N(R)$, $a=0+a$ 是诣零 $*$-clean 分解。若 $a\in 1-\mathrm{J}(R)$,则 $a-1\in\mathrm{J}(R)\subseteq N(R)$,故 $a=1+(a-1)$是诣零 $*$-clean 分解。从而 R 是诣零 $*$-clean 环。又由于 R 是局部的,故 R 中仅有的幂等元是 0 和 1。因此,0 和 1 是 R 中仅有的投射元,命题得证。

称 $*$-环 R 中的元素 a 是强 π-$*$-正则的(见[11]),若存在 $f\in P(R)$ 和 $v\in U(R)$ 使得 $a=f+v$, $fv=vf$ 且 $af\in N(R)$;称 R 是强 π-$*$-正则环,若 R 中每个元素都是强 π-$*$-正则的。根据[4,命题 3.5],任何强诣零 clean 元素是强 π-正则的。下面有类似的结论。

定理 1.2 任何强诣零 $*$-clean 元素是强 π-$*$-正则的。

证明 设 R 是 $*$-环且 $a\in R$ 是强诣零 $*$-clean 的。那么存在 $p\in P(R)$ 和 $b\in N(R)$ 使得 $a=p+b$ 且$pb=bp$,则 $a=(1-p)+(2p-1+b)$。显然,$(1-p)^2=1-p=(1-p)^*$, $2p-1+b=(2p-1)(1+(2p-1)b)\in U(R)$ 且 $a(1-p)=b(1-p)\in N(R)$。故元素 $a\in R$ 是强 π-$*$-正则的。

推论 1.4 强诣零 $*$-clean 环是强 π-$*$-正则的(从而是强 $*$-clean 环)。

定理 1.3 设 R 是 $*$-环。则下述等价:

(1) R 是诣零 clean 环且 R 中每个幂等元都是投射元;

(2) R 是诣零 $*$-clean 环且是 $*$-阿贝尔的;

(3) R 是强诣零 $*$-clean 环;

(4) R 是强 π-$*$-正则环且 R 中每个可逆元都是 unipotent 的;

(5) R 是强诣零 clean 环且 R 中每个幂等元都是投射元。

证明 (1)⇒(2)。显然,R 是诣零 $*$-clean 环。因为 R 中每个幂等元都是投射元,所以根据[12]引理 2.1,R 是阿贝尔的,因此是 $*$-阿贝尔的。

(2)⇒(3)显然。

(3)⇒(4)。由推论 1.4,R 是强 π-$*$-正则环。因为 R 是强诣零 clean 的,所以结合[4]推论 3.10,R 中每个可逆元都是 unipotent 的。

(4)⇒(5)。假设 R 是强 π-$*$-正则环。令 $a\in R$,则 $a=p+u$,其中 $p\in P(R)$, $u\in U(R)$ 且 $up=pu$, $ap\in N(R)$。因此 $a=(1-p)+(2p-1+u)$,其中$(1-p)^2=1-p=(1-p)^*$。下证 $2\in N(R)$。由于 $2\in R$ 是强 π-$*$-正则的,所以存在 $q\in P(R)$和 $v\in U(R)$使得 $2=q+v$ 且 $2q\in N(R)$。从而由可逆元 v 是 unipotent 的,得到 $1-q=v-1\in N(R)$。故 $q=1$, $2q=2\in N(R)$,即得 $2p+u=u(2pu^{-1}+1)\in U(R)$。所以 $2p+u-1$ 是幂零的。即证 $a=(1-p)+(2p-1+u)$是强诣零 $*$-clean 分解。下证 R 中每个幂等元都是投射元。对任意的 $e^2=e\in R$,得到 $e=p+b$,其中 $p\in P(R)$, $b\in N(R)$且元素 e,p 和 b 互相可交换。从而由 $e^2=(p+b)^2=p+2pb+b^2=p+b=e$ 得到 $2pb+b^2-b=(2p+b-1)b=0$。又因为 $2p+b-1\in U(R)$,所以 $b=0$,从而得到 $e=p+b=p$,命题得证。

(5)⇒(1)是显然的。

称元素 $a\in R$ 是拟幂零的[13],若对所有满足 $xa=ax$ 的 $x\in R$, $1-xa\in U(R)$;记环 R 中所有拟幂零元的集合为 R^{qnil}。显然,$\mathrm{J}(R)$和 $N(R)$都包含在 R^{qnil}中。

推论 1.5 设 R 是强诣零 $*$-clean 环,则 $R^{\mathrm{qnil}}=N(R)$。

证明 只需证明 $R^{\mathrm{qnil}}\subseteq N(R)$。取 $a\in R^{\mathrm{qnil}}$,则 $1+a\in U(R)$。由定理 1.3 知,R 中每个可逆元都是 unipotent 的。所以 $a=(1+a)-1\in N(R)$,得证。

环 R 到 R 的平凡扩张记为 $R\propto R$,定义其为加法阿贝尔群 $R\oplus R$,且满足乘法 $(a,b)(c,d)=(ac,ad+bc)$。

例 1.2　(1) 设 R 是 *-环。对合运算 $*$ 诱导出 $R\propto R$ 的一个映射,仍记为 $*$,且定义 $*$ 为:$(a,b)^*=(a^*,b^*)$,则 R 是强诣零 *-clean 环当且仅当 $R\propto R$ 是强诣零 *-clean 的。

(2) 设 R 是 *-环。对合运算 $*$ 诱导出 $R\propto R$ 的一个映射,仍记为 $*$,且定义 $*$ 为:$(a,b)^*=(a^*,-b^*)$,则 R 是强诣零 *-clean 环当且仅当 $R\propto R$ 是强诣零 *-clean 的。

证明　(1) 令 $S=R\propto R$。显然,映射 $*:(a,b)\mapsto(a^*,b^*)$ 是 S 的对合运算。假设环 R 是强诣零 *-clean 的,则 R 是诣零 clean 环。根据[4]推论 3.23(1),S 是诣零 clean 环。给定 $(e,f)^2=(e,f)\in S$,下证 $(e,f)^*=(e,f)$。因为 $e^2=e$ 且 $f=ef+fe$,所以由定理 1.3,$e^*=e$ 是 R 的中心元。从而 $f=2ef$,$(2e-1)f=0$。由于 $(2e-1)^2=1$,所以 $f=0$。故 $(e,f)^*=(e,f)$。即证 S 是强诣零 *-clean 环。

反之,设 S 是强诣零 *-clean 环,则 S 是诣零 clean 的,再根据[4]推论 3.23(1),R 是诣零 clean 环。对于任意的 $e^2=e\in R$,有 $(e,0)\in \mathrm{Id}(S)$。故由定理 1.3,得到 $(e,o)^*=(e,0)$,从而 $e^*=e$。因此结合定理 1.3,R 是强诣零 *-clean 环。

类似地,可证得(2)。

2　唯一诣零 *-clean 环

定义 2.1　设环 R 是 *-环,称元素 $a\in R$ 是唯一诣零 *-clean 的,若存在唯一的投射元 p 使得 $a-p$ 是幂零的。称 *-环 R 是唯一诣零 *-clean 环,若 R 中每个元素都是唯一诣零 *-clean 的。

显然,唯一诣零 *-clean 环是诣零 *-clean 的,但反之未必成立。

例 2.1　设环 $R=\mathbf{Z}_2\oplus\mathbf{Z}_2$。定义 $\sigma:R\to R$ 为 $\sigma(x,y)=(y,x)$。令环 $T_2(R,\sigma)=\left\{\begin{pmatrix}a&b\\0&a\end{pmatrix}\mid a,b\in R\right\}$ 且满足下列运算:

$$\begin{pmatrix}a&b\\0&a\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}c&d\\0&c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+c&b+d\\0&a+c\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}a&b\\0&a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c&d\\0&c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ac&ad+b\sigma(c)\\0&ac\end{pmatrix}。$$

定义映射 $*:T_2(R,\sigma)\to T_2(R,\sigma)$,其中 $\begin{pmatrix}a&b\\0&a\end{pmatrix}^*=\begin{pmatrix}a&\sigma(b)\\0&a\end{pmatrix}$。则由[14]例 2.2(1)知,$*$ 是 $T_2(R,\sigma)$ 的对合运算。对任意的 $a,b\in R$,$\begin{pmatrix}a&b\\0&a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&0\\0&a\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&b\\0&0\end{pmatrix}$,其中 $\begin{pmatrix}a&0\\0&a\end{pmatrix}\in P(T_2(R,\sigma))$,$\begin{pmatrix}0&b\\0&0\end{pmatrix}\in N(T_2(R,\sigma))$。因此,$T_2(R,\sigma)$ 是诣零 *-clean 环。但 $T_2(R,\sigma)$ 不是唯一诣零 *-clean 的。事实上,注意到元素

$$\begin{pmatrix}(1,0)&(1,1)\\(0,0)&(1,0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(1,0)&(0,0)\\(0,0)&(1,0)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}(0,0)&(1,1)\\(0,0)&(0,0)\end{pmatrix},$$

其中 $\begin{pmatrix}(1,0)&(0,0)\\(0,0)&(1,0)\end{pmatrix}\in P(T_2(R,\sigma))$ 且 $\begin{pmatrix}(0,0)&(1,1)\\(0,0)&(0,0)\end{pmatrix}\in N(T_2(R,\sigma))$。同时

$$\begin{pmatrix}(1,0)&(1,1)\\(0,0)&(1,0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(1,0)&(1,1)\\(0,0)&(1,0)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}(0,0)&(0,0)\\(0,0)&(0,0)\end{pmatrix},$$

且满足

$$\begin{pmatrix}(1,0)&(1,1)\\(0,0)&(1,0)\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}(1,0)&(1,1)\\(0,0)&(1,0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(1,0)&(1,1)\\(0,0)&(1,0)\end{pmatrix}^*,\ \begin{pmatrix}(0,0)&(0,0)\\(0,0)&(0,0)\end{pmatrix}\in N(T_2(R,\sigma))。$$

命题 2.1　设 R 是 *-环,$a\in R$,则 a 是唯一诣零 * -clean 元当且仅当 $1-a$ 是唯一诣零 *-clean 的。

证明　只需证若 a 是唯一诣零 *-clean 元,则 $1-a$ 也是唯一诣零 *-clean 元。由假设,则存在唯一的 $p\in P(R)$ 和 $b\in N(R)$ 使得 $a=p+b$,从而 $1-a=(1-p)+(-b)$ 是诣零 *-clean 的。假设 $1-a=q+n$,其中 $q^2=q=q^*$,$n\in N(R)$,则 $a=(1-q)+(-n)$。故 $1-q=p$,$-n=b$,即 $q=1-p$,$n=-b$。所以即证 $1-a$ 是唯一诣零 *-clean 元。

命题 2.2　设 R 是 *-环且 $a\in R$ 是强 π- *-正则元并有强 π- *-正则分解 $a=p+u$。若 $a=q+v$ 是元素 a 的另一个强 π- *-正则分解,则 $q=p$,$v=u$。

证明　只需证明 $q=p$。因为 pa,$qa\in N(R)$,所以存在正整数 n 使得 $(pa)^n=0=(qa)^n$。令 $p'=1-p$ 和

$q'=1-q$,则 $p'a=p'u$, $q'a=q'v$。等式两边同时取 n 次幂,得到 $p'a^n=p'u^n$, $q'a^n=q'v^n$。又因为 $pa^n=(pa)^n=0=(qa)^n=qa^n$,所以 $p'u^n=p'a^n=p'a^n+pa^n=a^n=q'a^n+qa^n=q'a^n=q'v^n$。等式 $a^n=q'v^n$ 左边乘以 p,右边乘以 v^{-n}得到 $0=pa^nv^{-n}=pq'v^nv^{-n}=pq'$。从而,$p=pq$。类似地,由等式 $a^n=p'u^n$ 可得 $0=qa^nu^{-n}=qp'$。故 $q=qp$。所以 $p=pq=(pq)^*=qp=q$,命题得证。

命题 2.3 强诣零 $*$ -clean 环是唯一诣零 $*$-clean 的。

证明 设 R 是强诣零 $*$-clean 环且 $a\in R$,则由定理 1.2,a 是强 π- $*$-正则元。故根据命题 2.2,a 有唯一的强 π- $*$-正则分解,从而有唯一的强诣零 $*$-clean 分解。而由定理 1.3 知,R 是 $*$-阿贝尔的,故 a 有唯一的诣零 $*$-clean 分解。所以 R 是唯一诣零 $*$-clean 环。

设 $R=\mathbf{Z}_{2^n}$满足 $n\geqslant 1$ 且 $*=1_R$。由注 1.2 知,R 是诣零 $*$-clean 环,从而是强诣零 $*$-clean 的。因此根据命题 2.3,R 是唯一诣零 $*$-clean 环。

推论 2.1 设 R 是 $*$-环且 $a\in Z(R)$,则 a 是诣零 $*$-clean 元当且仅当 a 是唯一诣零 $*$-clean 元。

证明 只需证若 a 是诣零 $*$-clean 元,则 a 是唯一诣零 $*$-clean 的。因为 $a\in R$ 是中心的,所以元素 a 的任何诣零 $*$-clean 分解都是强诣零 $*$-clean 分解。而由定理 1.2,强诣零 $*$-clean 元是强 π- $*$-正则的。故根据命题 2.2,元素 a 有唯一的强 π- $*$-正则分解,从而有唯一的强诣零 $*$-clean 分解,因此 a 是唯一诣零 $*$-clean 的。

显然,每一个中心投射元和中心幂零元都是唯一诣零 $*$-clean 的。

推论 2.2 设 R 是唯一诣零 $*$-clean 环,则 $Z(R)$ 是唯一诣零 $*$-clean 的。

证明 令 R 是唯一诣零 $*$-clean 环,则由定理 1.1 知,$Z(R)$ 是强诣零 $*$-clean 的。从而根据命题 2.3,$Z(R)$ 是唯一诣零 $*$-clean 环。

定理 2.1 设 R 是 $*$-环,则下述等价:

(1) R 是诣零 $*$-clean 环且是约化的(无非零的幂零元);

(2) R 是布尔环且 $*=1_R$;

(3) R 是唯一诣零 $*$-clean 环且 $\mathrm{Id}(R)=P(R)$, $\mathrm{J}(R)=0$;

(4) R 是强诣零 $*$-clean 环且 $\mathrm{J}(R)=0$。

证明 (1)$\Rightarrow$(2)。设 R 是约化环,则 $N(R)=0$。对任意的 $a\in R$,由于 R 是诣零 $*$-clean 的,故存在 $p\in P(R)$,使得 $a=p$。从而 $a^2=a=a^*$。即证 R 是布尔环且 $*=1_R$。

(2)$\Rightarrow$(3)。显然,$\mathrm{Id}(R)=P(R)$。而根据命题 1.4,R 是诣零 $*$-clean 环。又因为 R 是布尔的,所以 R 是交换环且 $\mathrm{J}(R)=0$。故结合命题 2.3,R 是唯一诣零 $*$-clean 环。

(3)$\Rightarrow$(4)。由定理 1.3 可得 R 是强诣零 $*$-clean 环。

(4)$\Rightarrow$(1)。设 R 是强诣零 $*$-clean 环,则 R 是诣零 $*$-clean 的,且 $\mathrm{J}(R)\subseteq N(R)$。又根据[9]定理 2.4,$N(R)$ 是理想,故 $N(R)=\mathrm{J}(R)=0$。即证 R 是约化环。

命题 2.4 设 I 是 $*$-环 R 的诣零 $*$-不变理想,且 R/I 中的投射元可以唯一提升到 R 上,则 R 是唯一诣零 $*$-clean 环当且仅当 R/I 是唯一诣零 $*$-clean 的。

证明 “$\Leftarrow$”。令 $x\in R$。记 $\bar{x}=x+I\in R/I$,则 $\bar{x}=\bar{p}+\bar{b}$,其中 $\bar{p}\in P(R/I)$, $\bar{b}\in N(R/I)$。因为 R/I 中的投射元可唯一提升到 R 上,不妨假设 $p^2=p=p^*\in R$ 且 p 是唯一的。由于 $\bar{b}\in N(R/I)$,所以存在正整数 m,使得 $\bar{b}^m=\overline{b^m}=\bar{0}$,从而 $b^m\in I$。记 $x-p=b+i$,其中 $i\in I$。注意到 $(b+i)^m\in I$ 是幂零的,故 $x=p+(b+i)$ 是诣零 $*$-clean 的,其中 $p\in P(R)$, $b+i\in N(R)$。再证唯一性。若 $x=q+n$ 也是诣零 $*$-clean 分解,则有 $\bar{x}=\bar{q}+\bar{n}\in R/I$ 是诣零 $*$-clean 分解。由假设,$\bar{q}=\bar{p}$。由于 R/I 中投射元唯一提升到 R 中,故有 $q=p$。所以 R 是唯一诣零 $*$-clean 环。

“$\Rightarrow$”。设 R 是唯一诣零 $*$-clean 环。取 $\bar{a}\in R/I$,其中 $a\in R$,且存在 $f\in P(R)$ 和 $v\in N(R)$ 使得 $a=f+v$ 是诣零 $*$-clean 的,则 $\bar{a}=\bar{f}+\bar{v}$ 是 R/I 中的诣零 $*$-clean 分解。下证唯一性,假设 $\bar{a}=\bar{q}+\bar{n}$ 是 R/I 中的另一个诣零 $*$-clean 分解。类似于上述充分性的证明,得到 $a=q+(n+j)$ 是诣零 $*$-clean 的,其中 $q\in P(R)$, $n+j\in N(R)$, $j\in I$。而 R 是唯一诣零 $*$-clean 环,故 $q=f$, $n+j=v$,从而 $\bar{q}=\bar{f}$, $\bar{n}=\overline{n+j}=\bar{v}$。即证,$R/I$ 是唯一诣零 $*$-clean 环。

下面主要考虑诣零 clean 环,诣零 *-clean 环,唯一诣零 clean 环,唯一诣零 *-clean 环,强诣零 clean 环及强诣零 *-clean 环之间的关系。

例 2.2　(1) 设环 $R=M_2(\mathbf{Z}_2)$。定义 R 中对合运算 * 为: $\boldsymbol{A}\mapsto\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$,其中 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的转置。经检验,R 是唯一诣零 *-clean 环,因此是诣零 clean 的。但由于 R 不是 *-阿贝尔的,故根据定理 1.3,R 不是强诣零 *-clean环。事实上,取 $p=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\in P(R)$,注意到 $\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$。而 $\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$。同时,由于 $\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$,故 R 也不是唯一诣零 clean 环。

(2) 设环 $R=\left\{\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}\right\}$,其中 $0,1\in\mathbf{Z}_2$。定义 $*:R\to R$ 为 $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}a+b&b\\a+b+c+d&b+d\end{pmatrix}$。则由[9]例 2.3 知,环 R 是具有一般矩阵加法和乘法的交换 *-环。事实上,R 是布尔环,故根据[4]定理 5.8,R 是唯一诣零 clean 环。但 $*\neq 1_R$,从而由命题 1.4 知,R 不是诣零 *-clean 环,即不是唯一诣零 *-clean 的。

(3) 设环 $R=T_2(\mathbf{Z}_2)$ 是 $\mathbf{Z}_2$ 上的 2 阶上三角矩阵环。定义 $*:R\to R$ 为 $\begin{pmatrix}a&b\\0&c\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}c&b\\0&a\end{pmatrix}$。则由例 1.1 知,$R$ 是(强)诣零 clean *-环,但不是诣零 *-clean 环,从而不是强诣零 *-clean 的。且 R 不是唯一诣零 clean 环,因为 $\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$ 是 R 的非中心幂等元,故根据引理 2.1 即得。

注 2.1　基于例 2.1 和例 2.2,对于 *-环构成的环类,有下面关系图:

强诣零 *-clean 环 ⟶ 唯一诣零 *-clean 环 ⟶ 诣零 *-clean 环

↓　　↓

强诣零 clean 环 ⟵ 唯一诣零 clean 环 ⟶ 诣零 clean 环

在上述图示中,所有关系均不可逆,且除此之外没有其它包含关系。

引理 2.1[4,引理5.5]　设 R 是唯一诣零 clean 环,则 R 中每一个幂等元都是中心的。

注 2.2　设 R 是唯一诣零 *-clean 环,则由例 2.2(1)知,存在 R 中投射元不是中心的。

命题 2.5　设 R 是 *-环,$a\in R$,且存在幂等元 e 和幂零元 b 使得元素 $a=e+b$ 是唯一诣零 clean 的,则 $a=p+b$ 是唯一诣零 *-clean 元当且仅当 $p=e$,其中 $p\in P(R)$。

证明　"⇒"。令 $a=p+b$ 是唯一诣零 *-clean 元,则 $a=p+b$ 是诣零 clean 的,故 $p=e$。

"⇐"。设 $p=e$,则元素 $a=e+b=p+b$ 是诣零 *-clean 的。下证唯一性。假设 $a=q+n$ 是另一个诣零 *-clean分解,其中 $q\in P(R)$, $n\in N(R)$,则 $a=q+n$ 是诣零 clean 的。从而由 a 的唯一诣零 clean 性,得到 $q=e=p$。即证 $a=p+b$ 是唯一诣零 *-clean 元。

对于[9]命题 2.1,下面给出另一种证明方法。

推论 2.3　设 R 是 *-环,则环 R 是强诣零 *-clean 的当且仅当:

(1) R 中每个幂等元都是投射元;

(2) R 是唯一诣零 clean 环。

证明　设 R 是强诣零 *-clean 环,根据定理 1.3,R 中每个幂等元都是投射元。又由命题 2.3 知,R 是唯一诣零 *-clean 的,从而 R 是唯一诣零 clean 环。反之可由定理 1.3 得到。

定理 2.2　设 R 是 *-阿贝尔的 *-环,结合命题 2.3,有下述等价:

(1) R 是诣零 *-clean 环;

(2) R 是强诣零 *-clean 环;

(3) R 是唯一诣零 *-clean 环。

参考文献:

[1] NICHOLSON W K. Lifting idempotents and exchange rings[J]. Transactions of the American Mathematical Society, 1977,

229:269-278.
[2] NICHOLSON W K, ZHOU Y Q. Clean rings: a survey[M]// Advances in Ring Theory. 2005:181-198.
[3] CAMILLO V P, YU H P. Exchange rings, units and idempotents[J]. Communications in Algebra, 1994, 22(12):4737-4749.
[4] DIESL A J. Nil clean rings[J]. Journal of Algebra, 2013, 383:197-211.
[5] KOSAN T, WANG Z, ZHOU Y. Nil-clean and strongly nil-clean rings[J]. Journal of Pure and Applied Algebra, 2016, 220(2):633-646.
[6] BREAZ S, GALUGAREANU G, DANCHEV P, et al. Nil-clean matrix rings[J]. Linear Algebra and Its Applications, 2013, 439(10):3115-3119.
[7] CHEN H, SHEIBANI M. On strongly nil clean rings[J]. Communications in Algebra, 2017, 45(4):1719-1726.
[8] VAS L. $*$-clean rings; some clean and almost clean Baer $*$-rings and von Neumann algebras[J]. Journal of Algebra, 2010, 324(12):3388-3400.
[9] HARMANCI A, CHEN H, OZCAN A C. Strongly nil-$*$-clean rings[J]. Journal of Algebra Combinatorics Discrete Structures and Applications, 2017, 2:155-164.
[10] UNGOR B, GURGUN O, HALICIOGLU S, et al. Feckly reduced rings[J]. Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics, 2015, 44(2):375-384.
[11] CUI Jian, WANG Zhou. A note on strongly $*$-clean rings[J]. Journal of the Korean Mathematical Society, 2015, 52(4): 839-851.
[12] LI Chunna, ZHOU Y. On strongly $*$-clean rings[J]. Journal of Algebra and Its Applications, 2011, 10(06):1363-1370.
[13] HARTE R E. On quasinilpotents in rings[J]. Panamerican Mathematical Journal, 1991, 1(1):10-16.
[14] CHEN H, HARMANCI A, OZCAN A C. Strongly J-clean rings with involutions[J]. Contemporary Mathematics, 2014 (609):33-44.

(编辑:李晓红)

(上接第 15 页)

参考文献:

[1] DRINFELD V G. Quasi-Hopf algebras[J]. Leningrad Math J, 1990, 1:1419-1457.
[2] DRINFELD V G. Quasi-Hopf algebras and Knizhnik-Zamolodchikov equations[M]// Problems of Modern Quantum Field Theory. Berlin: Springer,1989: 1-13
[3] BULACU D, PANAITE F, VAN OYSTAEYEN F. Quasi-Hopf algebra actions and smash product[J]. Comm Algebra, 2000, 28:631-651.
[4] WANG Shuanhong. Braided monoidal categories associated Yetter-Drinfeld categories[J]. Comm Algebra, 2002, 30:5111-5124.
[5] BULACU D, NAUWELAERTS E. Radford's biproduct for quasi-Hopf algebras and bosonization[J]. J Pure Appl Algebra, 2002, 174:1-42.
[6] BULACU D, PANAITE F, CAENEPEEL S. Yetter-Drinfeld categories for quasi-Hopf algebra[J]. Comm Algebra, 2006, 34: 1-35.
[7] PAREIGIS B. On braiding and dyslexia[J]. J Algebra, 1995, 171(2):413-425.
[8] CAENEPEEL S, VAN OYSTAEYEN F, ZHANG Yinhuo. Quantum Yang-Baxter module algebras[J]. *K*-theory, 1994, 8(3):231-255.

(编辑:李晓红)