



芮洪兴,教授,博士生导师,长期从事计算数学专业研究及教学工作,主要研究方向包括偏微分方程数值解法、科学与工程计算、油水资源数值方法及应用等。在计算数学顶级期刊 *Numer Math*、*SIAM J Numer Anal*、*Math Comp*, 在流体力学顶级期刊 *J Fluid Mech* 等发表论文 160 余篇,其中 SCI 收录 140 余篇。主持国家自然科学基金重点项目、面上项目和重大研究计划项目、国家科技重大专项专题项目等多项;与中石化勘探开发研究院、胜利油田等合作,开展油气藏开发数值模拟方法及应用研究,承担其委托项目多项。曾获教育部自然科学一等奖、山东省自然科学二等奖(首位)等;被评为山东省优秀研究生指导教师、山东大学优秀教师、山东大学我心目中的好导师等。现任中国工业与应用数学学会常务理事、中国计算物理学会常务理事、山东省数学会计算数学专委会主任,曾任中国计算数学学会常务理事等。

多孔介质 Darcy-Forchheimer 不可压缩混溶驱动问题的二重网格混合元算法



芮洪兴,龙新雨

(山东大学数学学院, 山东 济南 250100)

摘要: 研究采用二重网格混合有限元法求解多孔介质中不可压缩混相驱替问题,其中,该问题的速度与压力的关系由 Darcy-Forchheimer 定律描述。主要目的是将在细网格上求解一个大规模非线性系统转换为在粗网格上求解一个小规模非线性系统以及在细网格上求解一个线性系统。求解非线性系统需要用迭代法,而转换为线性系统后,只需要解线性代数方程组,可以大大提高运算的速度。在本文中,我们用混合元逼近速度和压力,用一般的有限元逼近组分浓度。在本文的数值实验中,我们验证了细网格上的误差估计,以及计算效率。

关键词: 混合元; 二重网格法; Darcy-Forchheimer; 混溶驱动

中图分类号: O241 **文献标志码:** A

引用格式: 芮洪兴,龙新雨. 多孔介质 Darcy-Forchheimer 不可压缩混溶驱动问题的二重网格混合元算法[J]. 山东大学学报(理学版), 2021, 56(10): 38-47.

Two-grid mixed finite element method for incompressible Darcy-Forchheimer miscible displacement problems

RUI Hong-xing, LONG Xin-yu

(School of Mathematics, Shandong University, Jinan 250100, Shandong, China)

Abstract: In this paper, a two-grid mixed finite element method is used to solve the incompressible miscible displacement problem

收稿日期: 2021-08-09; 网络出版时间: 2021-09-15 15:22:16

网络出版地址: <http://kns.cnki.net/kcms/detail/37.1389.N.20210914.1335.003.html>

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11671233)

第一作者简介: 芮洪兴(1963—),男,博士,教授,博士生导师,研究方向为偏微分方程数值解法、科学与工程计算、油水资源数值方法及应用等. E-mail: hxrui@sdu.edu.cn

in porous media, in which the relationship between velocity and pressure conforms to Darcy-Forchheimer law. The purpose of the method is to transform the solving of a large nonlinear system on the fine grid into the solving of a small nonlinear system on the coarse-grid and the solving of a linear system on the fine-grid. The iterative method is needed to solve the nonlinear system. After this transformation only the linear system need to be solved on fine-grid, which can greatly improve the speed of calculation. In the paper, we use piecewise constant element to approximate the velocity and use piecewise continuous linear element to approximate the pressure and concentration. Numerical experiments are carried out to show the error on the fine grid and computational efficiency.

Key words: mixed finite element; two-grid method; Darcy-Forchheimer flow; miscible displacement

0 引言

多孔介质混溶驱动问题在地下水污染治理、石油天然气开采工程以及生物工程等问题中有广泛应用,数值算法研究非常重要。该问题的数学模型是包含流体压力、速度、溶质浓度的耦合非线性偏微分耦合问题。其中,在高速流体情况下速度与压力的关系用 Darcy-Forchheimer 定律描述,该模型的方程如下:

$$\mu(C)K^{-1}\mathbf{u}+\beta\rho(C)|\mathbf{u}|\mathbf{u}+\nabla p=\gamma(C)\nabla d,\mathbf{x}\in\Omega,t\in[0,T]。(1)$$

方程(1)为 Darcy-Forchheimer 方程^[1],当流体高速流动时,流体的速度与压力梯度的关系要用该定律描述。该定律的主要特点是结合了非线性项的单调性以及 Darcy 部分的非退化性。当 $\beta=0$ 时,方程(1)为 Darcy 定律。Darcy 定律是在速度较低,孔隙度以及渗透率较小时成立的。Darcy 定律描述了速度以及压力梯度之间的线性关系。关于 Darcy-Forchheimer 方程的讨论可以参考文献[6,10]。

混合元方法求解 Darcy 问题或者二阶椭圆问题已有很多参考文献[2-3]。关于单相单组分 Darcy-Forchheimer 问题的求解也有许多研究。Girault 和 Wheeler^[6]用分段常数近似速度以及 Crouzi ex-Raviart 元近似压力,并且证明了该问题的解的存在唯一性和稳定性。相关的数值实验可以参考文献[10]。Pan 和 Rui^[12]用 Raviart-Thomas 元和 Brezzi-Douglas-Marini 元近似速度以及压力,证明了解的的存在唯一性,并且,由于 Darcy-Forchheimer 问题是非线性问题,需要进行迭代求解,因此他们给出了一种应用于实际计算中的线性的迭代方法,在数值实验中,采用最低阶 RT_0 混合元,数值实验结果证明了理论的正确性。同样,差分法也应用于求解 Darcy-Forchheimer 问题。在文献[15]中,他们提出了块中心有限差分方法,并用于求解非线性抛物型方程的初边值问题,在该问题中,速度以及压力梯度的关系符合 Darcy-Forchheimer 定律。块中心有限差分方法可以看作具有适当求积规则的最低阶 Raviart-Thomas 混合元方法,利用该方法,对速度以及压力同时进行逼近,并且,理论分析以及数值实验证明了块中心有限差分法关于速度以及压力的二阶收敛。在文献[4,11]中,Douglas 和 Park 考虑了混合有限元法求解时间依赖问题,分析了半离散格式。

关于 Darcy-Forchheimer 混相驱替问题的数值方法一些文献,可以参考文献[7,13,19]。在文献[13]中,Pan 和 Rui 用 Raviart-Thomas 元和 Brezzi-Douglas-Marini 元近似速度以及压力,用标准有限元近似浓度,并且,他们在不同的范数下建立了关于速度、压力以及浓度的误差估计。在数值实验中,他们采用最低阶 Raviart-Thomas 元近似速度以及压力。对于浓度,针对不同的网格采取了不同的近似方法。在矩形网格中,利用分段双线性函数近似浓度,在三角网格中,利用分段线性函数近似浓度,得到的数值结果与理论分析是一致的。在文献[7]中,Li 和 Rui 用块中心有限差分法求解 Darcy-Forchheimer 不可压缩混相驱替问题,通过引入辅助变量确保方程的质量守恒,建立了关于压力、速度、浓度以及辅助变量的误差估计。在文献[19]中,Xu 等利用多点通量混合元法求解速度以及压力,同样将标准有限元法用于求解浓度,并且给出了速度、压力以及浓度的误差分析。

二重网格方法由 Xu 提出^[17-18]。该方法主要用于求解非线性偏微分方程问题,减少求解非线性问题的计算时间。其基本思想是,首先在粗网格上求一个近似解,然后利用该近似解线性化非线性问题。这样,在细网格上求解一个大的非线性问题就转变为在粗网格上求解一个非线性问题以及在细网格上求解一个线性问题,由于非线性问题需要进行迭代求解,网格剖分越细,迭代矩阵越大,迭代的次数以及迭代的时间就会越多,利用二重网格方法在粗网格上求解非线性问题的迭代计算的时间可以忽略不计,整个系统计算的时间主要体现在细网格上求解线性问题,所以,利用二重网格法可以大量减少计算的迭代次数,继而节省计算时间,

大大提高了计算的效率。

关于二重网格方法的相关参考文献已有许多。在文献[14]中,Rui和Liu提出了用二重网格块中心有限差分方法求解单项单组分不可压缩的Darcy-Forchheimer流问题,为了克服 $|\mathbf{u}|$ 在0点处不可微的问题,引入了一个极小的正数 ε ,用 $\sqrt{\varepsilon^2+u^2}$ 近似 $|\mathbf{u}|$,并且用 $\sqrt{\varepsilon^2+u^2}$ 的导数去近似 $|\mathbf{u}|$ 的导数。他们证明了关于压力以及速度的 L^2 范数的误差阶是 $O(h^2+H^4+\varepsilon)$,在数值实验中,根据 $H=O(h^{1/2})$ 和 $\varepsilon=O(h^2)$ 的规则来选择网格大小以及参数 ε ,最终的实验结果与理论分析一致。在文献[9]中,Liu和Cui将二重网格块中心有限差分方法进一步应用到可压缩的Darcy-Forchheimer问题,得到了速度以及压力的误差阶是 $O(\Delta t+\varepsilon+h^2+H^3)$ 。在文献[8]中,Faisal和Johnson将二重网格混合有限元法用于求解Darcy-Forchheimer问题,用分片常数有限元近似速度,用分段连续线性有限元近似压力,得到了关于速度的 L^2 范数误差估计以及压力梯度的 $L^{\frac{3}{2}}$ 范数的误差估计都是 $O(\varepsilon h+h+H^2+\varepsilon)$ 。对于基于Darcy方程的渗流驱动问题,在文献[8]中Liu和Chen等提出了二重网格Galerkin及混合元方法等求解混相驱替问题;在文献[16]中,Wang和Chen采用两重网格欧拉-拉格朗日局部伴随方法和混合有限元方法求解混相驱替问题。

本文的主要内容是提出基于Darcy-Forchheimer的不可压缩混溶驱动问题的二重网格混合元方法,并进行数值验证。为方便起见,文中我们用 C 代表一般性常数,不论有无下标,在不同地方可以代表不同的值。

1 问题描述以及变分形式

在这一节,我们考虑的Darcy-Forchheimer不可压缩混相驱替问题如下:

$$\mu(C)K^{-1}\mathbf{u} + \beta\rho(C)|\mathbf{u}|\mathbf{u} + \nabla p = \gamma(C)\nabla d, \mathbf{x} \in \Omega, t \in [0, T], \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = q = q_l + q_p, \mathbf{x} \in \Omega, t \in [0, T], \quad (3)$$

$$\phi \frac{\partial C}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla C - \nabla \cdot (D(\mathbf{u})\nabla C) + q_l C = q_l C_l, \mathbf{x} \in \Omega, t \in [0, T]. \quad (4)$$

其中, Ω 为有界区域, $[0, T]$ 为时间区域。

方程(2)为Darcy-Forchheimer方程^[1],当流体高速流动时,流体的速度与压力梯度的关系要用该定律描述。该定律的主要特点是结合了非线性项的单调性以及Darcy部分的非退化性。当 $\beta=0$ 时,方程(1)为Darcy定律。Darcy定律是在速度较低,孔隙度以及渗透率较小时成立的。Darcy定律描述了速度以及压力梯度之间的线性关系。关于Darcy-Forchheimer方程的讨论可以参考文献[6,10]。在本文研究的混相驱替模型中,方程(3)表示混合流体的质量守恒,方程(4)表示两种成分的混合浓度扩散过程。

在该模型中,各个参数代表的物理量如下: \mathbf{u} 表示流体的Darcy速度, p 表示压力, C 表示混合流体的浓度, K 表示多孔介质的渗透率, ϕ 表示孔隙度, β 表示Forchheimer数, $\gamma(C)$ 为重力系数, d 为垂直坐标, q 表示外部流量,表示为产出 q_p 和流入 q_l 的线性关系,即 $q = q_p + q_l$ 。 C_l 表示注水井的注入浓度和生产井的常驻浓度。 $\mu(C)$ 为混合黏度,该物理量通常由实验所决定,表示为以下关系

$$\mu(C) = \mu_1 \left[\left(\frac{\mu_1}{\mu_2} \right)^{1/4} C + (1 - C) \right]^{-4}, \quad (5)$$

其中, μ_i 为流体混合物中第 i 种成分的黏度。流体的密度 $\rho(C)$ 由构成混合物的两种物质密度的体积平均值给出,表示为以下关系:

$$\rho(C) = \rho_1 C + \rho_2(1 - C). \quad (6)$$

在本文中,采用以下初边值条件

$$\begin{cases} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0, (D(\mathbf{u})\nabla C - uC) \cdot \mathbf{n} = 0, \mathbf{x} \in \partial\Omega, t \in [0, T], \\ C(\mathbf{x}, 0) = C_0(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \Omega. \end{cases} \quad (7)$$

为了简便起见,我们假设扩散系数 $D(\mathbf{x}) = d_{\text{mol}}\mathbf{I} = \text{diag}(D_{ll}), l = 1, 2$,为对角矩阵,其中 \mathbf{I} 为单位矩阵,即只考虑分子扩散。

对上述方程的系数作如下假设

$$\begin{cases} 0 < a_* |x|^2 \leq (\mu(C)K^{-1}(x)x) \cdot x \leq a^* |x|^2, 0 < \phi_* \leq \phi(x) \leq \phi^*, \\ 0 < D_* |x|^2 \leq (D(x,u)x) \cdot x \leq D^* |x|^2, 0 < \rho_* \leq \rho(C) \leq \rho^*, \\ \left| \frac{\partial(K/\mu)}{\partial C}(x,C) \right| + \left| \frac{\partial\gamma}{\partial C}(x,C) \right| + |\nabla\phi| + \left| \frac{\partial D}{\partial u}(x,u) \right| + |q_l(x,t)| + \left| \frac{\partial q_l}{\partial t}(x,t) \right| \leq K^*. \end{cases} \quad (8)$$

其中, $a_*, a^*, D_*, D^*, K^*, K_*, \phi^*, \phi_*$ 为正的常数。另外对问题的解作如下正则性假设

$$\begin{cases} p \in L^\infty(H^{k+1}), \\ u \in L^\infty(H^{k+1}(\text{div}) \cap L^\infty(W^{1,\infty}) \cap W^{1,\infty}(L^\infty) \cap H^2(L^2) \cap L^\infty(W^{1,3})), \\ c \in L^\infty(H^{l+1}) \cap H^1(H^{l+1}) \cap L^\infty(W^{1,\infty}) \cap H^2(L^2). \end{cases} \quad (9)$$

为了给出问题的变分形式,首先我们需要定于如下空间

$$\begin{cases} L_0^2 = \{v, v \in L^2(\Omega), \int_\Omega v(x) dx = 0\}, \\ X = L^3(\Omega)^2, \\ M = W^{1,3/2}(\Omega) \cap L_0^2, \\ V = H^1(\Omega). \end{cases} \quad (10)$$

在方程(2)–(4)两端分别乘以相应的检验函数,并且由 Green 公式以及边界条件,我们可以得到关于方程(2)–(4)的变分形式:求解 $(u, p, C): [0, T] \rightarrow (X, M, V)$, 使得

$$\begin{cases} \text{(a)} \int_\Omega (\mu(C)K^{-1}u + \beta\rho(C)|u|u) \cdot v dx + \int_\Omega \nabla p \cdot v dx = \int_\Omega \gamma(C) \nabla d \cdot v dx, \forall x \in X, \\ \text{(b)} \int_\Omega \nabla w \cdot u dx = - \int_\Omega q w dx, \forall w \in M, \\ \text{(c)} \int_\Omega \left(\phi \frac{\partial C}{\partial t} + u \cdot \nabla C \right) \chi dx + \int_\Omega D(u) \nabla C \cdot \nabla \chi dx + \int_\Omega q_l C \chi dx = \int_\Omega q_l C_l \chi dx, \forall \chi \in V. \end{cases} \quad (11)$$

这是一般有限元法的变分形式。

下面我们给出二重网格变分形式。二重网格方法的核心是利用泰勒展开公式,从而将非线性项进行泰勒展开,达到线性化的目的。可以看到,关于该模型中 $|u|$ 在零点处不可微,给泰勒展开带来困难。类似文献[14],同样地,我们引入了一个极小的正数 ε ,用 $\sqrt{\varepsilon^2 + u^2}$ 近似 $|u|$,并且用 $\sqrt{\varepsilon^2 + u^2}$ 的导数去近似 $|u|$ 的导数。令

$$|u|_\varepsilon = \sqrt{|u|^2 + \varepsilon^2}, \quad (12)$$

其中, ε 为一个极小的正数,当 ε 非常小的时候, $|u|_\varepsilon$ 可以很好地近似 $|u|$,并且 $|u|_\varepsilon$ 的导数也可以很好地近似 $|u|$,同时有 $|u|_\varepsilon - |u| < \varepsilon$ 。我们定义

$$f_\varepsilon(u) = |u|_\varepsilon u. \quad (13)$$

即

$$f_\varepsilon(u) = \begin{bmatrix} f_{\varepsilon,1}(u) \\ f_{\varepsilon,2}(u) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |u|_\varepsilon u_1 \\ |u|_\varepsilon u_2 \end{bmatrix}. \quad (14)$$

在 u_H 处对函数 $f_\varepsilon(u)$ 进行泰勒展开可以得到

$$f_\varepsilon(u) = f_\varepsilon(u_H) + \mathcal{D}f_\varepsilon(u_H)(u - u_H) + \frac{1}{2!} \mathcal{D}^2 f_\varepsilon(\zeta_H)(u - u_H)^2. \quad (15)$$

其中, $\zeta_H = tu + (1-t)u_H, t \in [0, 1], \mathcal{D}f_\varepsilon(u_H), \mathcal{D}^2 f_\varepsilon(\zeta_H)$ 为一阶以及二阶导数,定义如下

$$\mathcal{D}f_\varepsilon(u_H) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_{\varepsilon,1}(u_H)}{\partial u_1} & \frac{\partial f_{\varepsilon,1}(u_H)}{\partial u_2} \\ \frac{\partial f_{\varepsilon,2}(u_H)}{\partial u_1} & \frac{\partial f_{\varepsilon,2}(u_H)}{\partial u_2} \end{pmatrix} \quad (16)$$

$$\mathcal{D}^2 f_\varepsilon(\zeta_H) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f_{\varepsilon,1}(\zeta_H)}{\partial u_1^2} & \frac{\partial^2 f_{\varepsilon,1}(\zeta_H)}{\partial u_1 \partial u_2} & \frac{\partial^2 f_{\varepsilon,1}(\zeta_H)}{\partial u_2 \partial u_1} & \frac{\partial^2 f_{\varepsilon,1}(\zeta_H)}{\partial u_2^2} \\ \frac{\partial^2 f_{\varepsilon,2}(\zeta_H)}{\partial u_1^2} & \frac{\partial^2 f_{\varepsilon,2}(\zeta_H)}{\partial u_1 \partial u_2} & \frac{\partial^2 f_{\varepsilon,2}(\zeta_H)}{\partial u_2 \partial u_1} & \frac{\partial^2 f_{\varepsilon,2}(\zeta_H)}{\partial u_2^2} \end{pmatrix}. \quad (17)$$

基于这些准备,我们给出二重网格法的变分形式,求解 $(u, p, C): [0, T] \rightarrow (X, M, V)$, 使得

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a)} \int_{\Omega} (\mu(C) K^{-1} \mathbf{u} + \beta \rho(C) \mathcal{D} f_{\varepsilon}(\mathbf{u}_H) \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} \, dx + \int_{\Omega} \nabla p \cdot \mathbf{v} \, dx \\ \quad = \int_{\Omega} \gamma(C) \nabla d \cdot \mathbf{v} \, dx - \int_{\Omega} \beta \rho(C) |\mathbf{u}_H|_{\varepsilon} \mathbf{u}_H \cdot \mathbf{v} \, dx \\ \quad + \int_{\Omega} \beta \rho(C) \mathcal{D} f_{\varepsilon}(\mathbf{u}_H) \mathbf{u}_H \cdot \mathbf{v} \, dx, \quad \forall \mathbf{x} \in X, \\ \text{(b)} \int_{\Omega} \nabla w \cdot \mathbf{u} \, dx = - \int_{\Omega} q w \, dx, \quad \forall w \in M, \\ \text{(c)} \int_{\Omega} \left(\phi \frac{\partial C}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla C \right) \chi \, dx + \int_{\Omega} D(\mathbf{u}) \nabla C \cdot \nabla \chi \, dx + \int_{\Omega} q_I C \chi \, dx = \int_{\Omega} q_I C_I \chi \, dx, \quad \forall \chi \in V. \end{array} \right. \quad (18)$$

2 离散空间及二重网格离散格式

不妨令 Ω 为多边形区域($d=2$), 我们假设 \mathcal{T}_h 为关于 $\bar{\Omega}$ 一致的三角剖分, 并且, 假设存在一个正的常数 α 独立于 h 和 $T \in \mathcal{T}_h$ 使得

$$\forall T \in \mathcal{T}_h, \quad \frac{h_T}{\rho_T} \leq \alpha, \quad (19)$$

其中, h_T 为 T 的直径, ρ_T 为 T 的内切圆的直径。我们用以下的空间来离散速度 \mathbf{u} 、压力 p 以及浓度 C 。

$$\left\{ \begin{array}{l} X_h = \{v \in [L^2(\Omega)]^2; v|_T \in P_0, \forall T \in \mathcal{T}_h\}, \\ M_h = Q_h \cap L^2_0(\Omega), \quad Q_h = \{q \in C^0(\bar{\Omega}); q|_T \in P_1, \forall T \in \mathcal{T}_h\}, \\ V_h \in V \text{ 为标准的有限元空间。} \end{array} \right. \quad (20)$$

接下来给出两重网格的离散格式。令 Δt_p 为关于压力的时间剖分, $\Delta t_{p,1}$ 为第一个时间步长的增量, 并且有 $t_i = \Delta t_{p,1} + (i-1)\Delta t_p$, 压力 p 的时间剖分为 $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_M = T$ 。同样地, 关于浓度 C , 有时间剖分 Δt_c , $0 = t^0 < t^1 < \dots < t^N = T$, Δt_c 与 Δt_p 有这样的关系, 即 $\frac{\Delta t_p}{\Delta t_c} = n$, 其中, n 为正整数。令 $j^0 = \frac{\Delta t_{p,1}}{\Delta t_c}$ 和 $j = \frac{\Delta t_p}{\Delta t_c}$ 。

令 $X_H, X_h \in X, M_H, M_h \in M, V_H, V_h \in V$ 为定义如(20)的有限元空间, 其中, $X_H \subset X_h, M_H \subset M_h, V_H \subset V_h, H \gg h$, 关于时间格式, 我们选择向后欧拉格式。我们给出计算格式如下。

二重网格混合元格式

Step 1 在网格剖分为 H 的粗网格 \mathcal{T}_H 下, 给一个初值 $C_{H,0}$, 对任意的 $(\mathbf{v}_H, w_H, \chi_H) \in X_H \times M_H \times V_H$, 求解 $(\mathbf{u}_{H,m}, p_{H,m}) \in X_H \times M_H, m = 0, 1, \dots, M_1$ 以及 $C_H^n \in V_H, n = 1, 2, \dots, N_1$, 满足

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a)} \int_{\Omega} (\mu(C_{H,m}) K^{-1} \mathbf{u}_{H,m} + \beta \rho(C_{H,m}) |\mathbf{u}_{H,m}|_{\varepsilon} \mathbf{u}_{H,m}) \cdot \mathbf{v}_H \, dx \\ \quad + \int_{\Omega} \nabla p_{H,m} \cdot \mathbf{v}_H \, dx = \int_{\Omega} \gamma(C_{H,m}) \nabla d \cdot \mathbf{v}_H \, dx, \quad \forall \mathbf{v}_H \in X_H, \\ \text{(b)} \int_{\Omega} \nabla w_H \cdot \mathbf{u}_{H,m} \, dx = - \int_{\Omega} q w_H \, dx, \quad \forall w_H \in M_H, \\ \text{(c)} \int_{\Omega} \left(\phi \frac{C_H^n - C_H^{n-1}}{\Delta t} + E \mathbf{u}_H^n \cdot \nabla C_H^n \right) \chi_H \, dx + \int_{\Omega} D(E \mathbf{u}_H^n) \nabla C_H^n \cdot \nabla \chi_H \, dx \\ \quad + \int_{\Omega} q_I C_H^n \chi_H \, dx = \int_{\Omega} q_I C_H^{n-1} \chi_H \, dx, \quad \forall \chi_H \in V_H. \end{array} \right. \quad (21)$$

Step 2 在细网格 \mathcal{T}_h 下, 给一个初值 $C_{h,0}$, 对任意的 $(\mathbf{v}_h, w_h, \chi_h) \in X_h \times M_h \times V_h$, 求解 $(\mathbf{u}_{h,m}, p_{h,m}) \in X_h \times M_h, m = 0, 1, \dots, M_2$ 以及 $C_h^n \in V_h, n = 1, 2, \dots, N_2$, 满足

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \text{(a)} \int_{\Omega} (\mu(C_{h,m}) K^{-1} \mathbf{u}_{h,m} + \beta \rho(C_{h,m}) \mathcal{D} f_{\varepsilon}(\mathbf{u}_{H,m}) \mathbf{u}_{h,m}) \cdot \mathbf{v}_h \, dx + \int_{\Omega} \nabla p_{h,m} \cdot \mathbf{v}_h \, dx \\
 \quad = \int_{\Omega} \gamma(C_{h,m}) \nabla d \cdot \mathbf{v}_h \, dx - \int_{\Omega} \beta \rho(C_{h,m}) | \mathbf{u}_{H,m} |_{\varepsilon} \mathbf{u}_{H,m} \cdot \mathbf{v}_h \, dx \\
 \quad \quad + \int_{\Omega} \beta \rho(C_{h,m}) \mathcal{D} f_{\varepsilon}(\mathbf{u}_{H,m}) \mathbf{u}_{H,m} \cdot \mathbf{v}_{h,m} \, dx, \quad \forall \mathbf{v}_h \in M_h, \\
 \text{(b)} \int_{\Omega} \nabla w_h \cdot \mathbf{u}_{h,m} \, dx = - \int_{\Omega} q w_h \, dx, \quad \forall w_h \in M_h, \\
 \text{(c)} \int_{\Omega} \left(\phi \frac{C_h^n - C_h^{n-1}}{\Delta t} + E \mathbf{u}_h^n \cdot \nabla C_h^n \right) \chi_h \, dx + \int_{\Omega} D(E \mathbf{u}_h^n) \nabla C_h^n \cdot \nabla \chi_h \, dx + \int_{\Omega} q_l C_h^n \chi_h \, dx \\
 \quad = \int_{\Omega} q_l C_l \chi_h \, dx, \quad \forall \chi_h \in V_h.
 \end{array} \right. \tag{22}$$

上式中的 $E \mathbf{u}^n$ 为插值,可以参考文献[13]。时间步长为 t^n 时, $t_{m-1} < t^n \leq t_m$, $E \mathbf{u}$ 的表达式如下:

$$E \mathbf{u}^n = \begin{cases} \mathbf{u}_0, & t_0 < t^n \leq t_1, m = 1, \\ \left(1 + \frac{t^n - t_{m-1}}{t_{m-1} - t_{m-2}} \right) \mathbf{u}_{m-1} - \frac{t^n - t_{m-1}}{t_{m-1} - t_{m-2}} \mathbf{u}_{m-2}, & t_{m-1} < t^n \leq t_m, m \geq 2. \end{cases} \tag{23}$$

格式中的非线性函数 $\mu(\cdot), \rho(\cdot)$ 的定义域为 $[0, 1]$, 为保证出现在函数中近似浓度在 $[0, 1]$ 范围内,上式中取

$$C_{H,m} = \min \{ 1, \max \{ 0, C_{H,m} \} \} \in [0, 1], \tag{24}$$

$$C_{h,m} = \min \{ 1, \max \{ 0, C_{h,m} \} \} \in [0, 1]. \tag{25}$$

关于 Step 1 和 Step 2 的计算过程如下

Step 1 对于 $m = 0$, $C_H^0 = C_{H,0}$ 已知, 由(21) 第一和第二式可以计算出 $\mathbf{u}_{H,0}, p_{H,0}$, 因为有非线性部分, 所以需要迭代法进行求解。然后由(21) 第三式可以得到 $C_H^1, C_H^2, \dots, C_H^0$ 。

对于 $m \geq 1$, $C_H^{j^0+(m-1)j} = C_{H,m}$ 已知, 由(21) 第一和第二式可以计算出 $\mathbf{u}_{H,m}, p_{H,m}$, 然后由(21) 第三式可以得到 $C_H^{j^0+(m-1)j+1}, C_H^{j^0+(m-1)j+2}, \dots, C_H^{j^0+mj}$ 。

Step 2 由第一步, 可以得到粗网格上的解 \mathbf{u}_H, p_H 。对于 $m = 0$, $C_h^0 = C_{h,0}$ 和 $\mathbf{u}_{H,0}$ 已知, 由(22) 第一和第二式可以计算出 $\mathbf{u}_{h,0}, p_{h,0}$, 然后由第三式可以得到 $C_h^1, C_h^2, \dots, C_h^0$ 。

对于 $m \geq 1$, $C_h^{j^0+(m-1)j} = C_{h,m}$ 和相应粗网格的解已知, 由(22) 第一和第二式可以计算出 $\mathbf{u}_{h,m}, p_{h,m}$, 然后由第三式可以得到 $C_h^{j^0+(m-1)j+1}, C_h^{j^0+(m-1)j+2}, \dots, C_h^{j^0+mj}$ 。

上述二重网格混合元格式的数值解是存在唯一的。限于篇幅,有限元空间逼近性质以及误差估计不做详细分析,感兴趣读者可以参看相关文献进行推导。

3 数值实验

为了简便起见,我们选择空间区域 $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$ 以及时间区域 $T = [0, 1]$, 渗透率、孔隙度、扩散系数以及海默数取为 $K = 1, \phi = 1, D = 2, \beta = 1$ 。密度和黏性的值由 $\rho_1 = 2, \rho_2 = 1, \mu_1 = 2, \mu_2 = 1$ 计算可得。

我们用分片最低次 Raviart-Thomas 混合元空间近似速度和压力,用分片线性有限元近似浓度,并且取 $\Delta t_p = \Delta t_c = \Delta t, \Delta t = h$ 。

例 1 解析解如下,右端项由解析解可以计算得出。

$$\begin{cases} p(x, y, t) = t \left(x - \frac{1}{2} \right) \left(y - \frac{1}{2} \right), \\ \mathbf{u}(x, y, t) = \sin(\pi t) (\sin(\pi x) \cos(\pi y), \cos(\pi x) \sin(\pi y))^T, \\ c(x, y, t) = t \cos(\pi x) \cos(\pi y). \end{cases} \tag{26}$$

例 2 解析解如下,右端项由解析解可以计算得出。

$$\begin{cases} p(x, y, t) = tx^3y^3, \\ \mathbf{u}(x, y, t) = (\sin(\pi t) \sin(\pi x)y^2, \sin(\pi t) \sin(\pi y)x^2)^T, \\ c(x, y, t) = (t^2 - t) \cos(\pi x) \cos(\pi y). \end{cases} \quad (27)$$

例3 解析解如下,右端项由解析解可以计算得出。

$$\begin{cases} p(x, y, t) = \exp(-t)(x^2 + y^2), \\ \mathbf{u}(x, y, t) = (\sin(\pi t)y^3x(x-1), \sin(\pi t)x^3y(y-1))^T, \\ c(x, y, t) = \cos(\pi t) \cos(\pi x) \cos(\pi y). \end{cases} \quad (28)$$

数值计算结果见表1—6以及图1—6。

表1 数值算例1的 \mathbf{u} 和 p 误差阶以及CPU时间($\varepsilon = 10^{-3}$)
Table 1 The error-order for \mathbf{u} and p and CPU time of Example 1

H	h	$\ \mathbf{u}-\mathbf{u}_h\ _{L^2}$	阶	$\ \nabla(p-p_h)\ _{L^2}$	阶	CPU/s
	1/4	5.8843e-02		1.3718e-01		1.503
1/2	1/4	5.3089e-02		1.3869e-01		1.019
	1/9	2.8949e-02	0.874 7	6.4243e-02	0.935 5	10.540
1/3	1/9	2.5708e-02	0.894 2	6.5336e-02	0.928 2	4.416
	1/16	1.6572e-02	0.969 5	3.6613e-02	0.977 2	50.786
1/4	1/16	1.4841e-02	0.954 9	3.7420e-02	0.968 7	16.574
	1/25	1.0639e-02	0.993 1	2.3535e-02	0.990 2	189.612
1/5	1/25	9.6721e-03	0.959 4	2.4113e-02	0.984 7	68.704
	1/36	7.3919e-03	0.998 6	1.6374e-02	0.994 9	713.761
1/6	1/36	6.8154e-03	0.960 0	1.6798e-02	0.991 4	218.231

表2 数值算例1的 C 误差阶($\varepsilon = 10^{-3}$)
Table 2 The error-order for C of Example 1

H	h	$\ C-C_h\ _{L^2}$	阶
	1/4	2.1523e-01	
1/2	1/4	2.1508e-01	
	1/9	1.0646e-01	0.868 1
1/3	1/9	1.0652e-01	0.867 4
	1/16	6.1226e-02	0.961 5
1/4	1/16	6.1299e-02	0.960 4
	1/25	3.9461e-02	0.984 3
1/5	1/25	3.9528e-02	0.983 1
	1/36	2.7487e-02	0.991 7
1/6	1/36	2.7552e-02	0.989 8

表3 数值算例2的 \mathbf{u} 和 p 误差阶以及CPU时间($\varepsilon = 10^{-3}$)
Table 3 The error-order for \mathbf{u} and p and CPU time of Example 2

H	h	$\ \mathbf{u}-\mathbf{u}_h\ _{L^2}$	阶	$\ \nabla(p-p_h)\ _{L^2}$	阶	CPU/s
	1/4	6.2945e-02		1.5337e-01		1.695
1/2	1/4	8.1274e-02		1.5436e-01		1.113
	1/9	4.4374e-02	0.431 1	7.1012e-02	0.949 5	12.863
1/3	1/9	5.7120e-02	0.434 9	7.4730e-02	0.894 5	3.915
	1/16	3.0407e-02	0.656 9	4.0297e-02	0.984 7	69.364
1/4	1/16	3.6728e-02	0.767 5	4.5862e-02	0.848 6	16.550
	1/25	2.1765e-02	0.749 2	2.5856e-02	0.994 3	269.043
1/5	1/25	2.5855e-02	0.786 6	3.1684e-02	0.828 7	69.308
	1/36	1.6230e-02	0.804 7	1.7970e-02	0.997 8	807.811
1/6	1/36	1.9544e-02	0.767 4	2.3384e-02	0.833 0	227.961

表 4 数值算例 2 的 C 误差阶 ($\varepsilon = 10^{-3}$)
Table 4 The error-order for C of Example 2

H	h	$\ C - C_h\ _{L^2}$	阶
	1/4	1.4836e-01	
1/2	1/4	1.4821e-01	
	1/9	7.0494e-02	0.917 6
1/3	1/9	7.0259e-02	0.920 5
	1/16	4.4262e-02	0.808 9
1/4	1/16	4.4090e-02	0.8098
	1/25	3.0044e-02	0.868 2
1/5	1/25	2.9926e-02	0.868 3
	1/36	2.1566e-02	0.9092
1/6	1/36	2.1489e-02	0.908 2

表 5 数值算例 3 的 u 和 p 误差阶以及 CPU 时间 ($\varepsilon = 10^{-3}$)
Table 5 The error-order for u and p and CPU time of Example 3

H	h	$\ u - u_h\ _{L^2}$	阶	$\ \nabla(p - p_h)\ _{L^{\frac{3}{2}}}$	阶	CPU/s
	1/4	1.9488e-02		8.0555e-02		1.226
1/2	1/4	1.8622e-02		8.0517e-02		0.960
	1/9	1.0051e-02	0.816 5	3.6351e-02	0.981 2	7.124
1/3	1/9	9.6328e-03	0.812 9	3.6352e-02	0.980 6	4.959
	1/16	5.8865e-03	0.929 9	2.0512e-02	0.9945	37.585
1/4	1/16	5.6772e-03	0.918 9	2.0519e-02	0.994 0	16.704
	1/25	3.8249e-03	0.966 0	1.3141e-02	0.997 7	143.111
1/5	1/25	3.7083e-03	0.954 3	1.3147e-02	0.997 5	60.223
	1/36	2.6750e-03	0.980 6	9.1290e-03	0.999 0	492.683
1/6	1/36	2.6041e-03	0.969 4	9.1345e-03	0.998 6	205.239

表 6 数值算例 3 的 C 误差阶 ($\varepsilon = 10^{-3}$)
Table 6 The error-order for C of Example 3

H	h	$\ C - C_h\ _{L^2}$	阶
	1/4	1.0340e-01	
1/2	1/4	1.0339e-01	
	1/9	3.2466e-02	1.428 5
1/3	1/9	3.2449e-02	1.429 0
	1/16	1.5381e-02	1.298 4
1/4	1/16	1.5366e-02	1.299 2
	1/25	9.0753e-03	1.182 1
1/5	1/25	9.0633e-03	1.182 9
	1/36	6.0509e-03	1.111 6
1/6	1/36	6.0407e-03	1.112 6

在求解空间区域 Ω 上,选择的粗网格剖分大小为 $H = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6} \right\}$, 细网格的剖分大小根据 $H^2 = h$

的原则选取。表 1、3、5 展示了一般有限元法以及二重网格有限元法的速度的 L^2 范数和压力梯度的 $L^{\frac{3}{2}}$ 范数的误差以及误差阶、CPU 的运行时间。可以看到,一般有限元法以及二重网格有限元法求解的误差相差不大,并且速度的 L^2 范数和压力梯度的 $L^{\frac{3}{2}}$ 范数的误差阶都为二阶,二重网格有限元法的运算时间大大减少,体现出了该方法的优越性。表 2、4、6 展示了浓度的 L^2 范数的误差以及误差阶,误差阶同样也为二阶。图 1—3 为压力和浓度的真解、一般有限元法和二重网格有限元法求得的压力数值解的图像,图 4—6 为数值算例 1—3 的速度、压力以及浓度的收敛速度。

以上算例充分展示了二重网格算法的优越性。

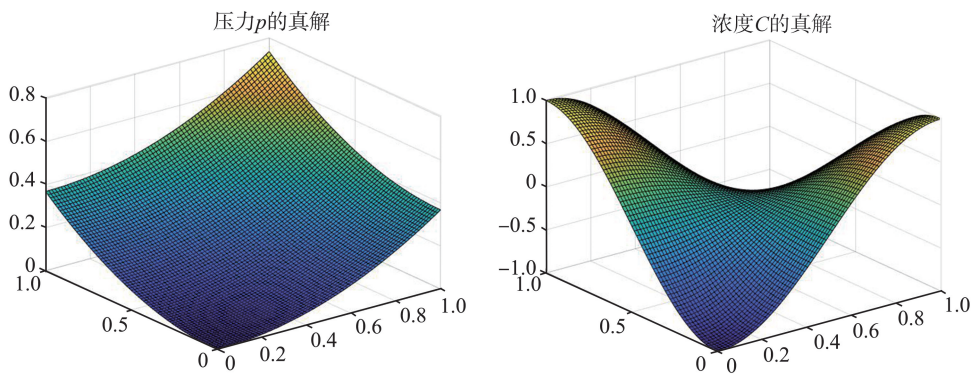


图1 解析解: 左: 压力 p , 右: 浓度 C

Fig.1 Analytical solution. Left: pressure p , Right: concentration C

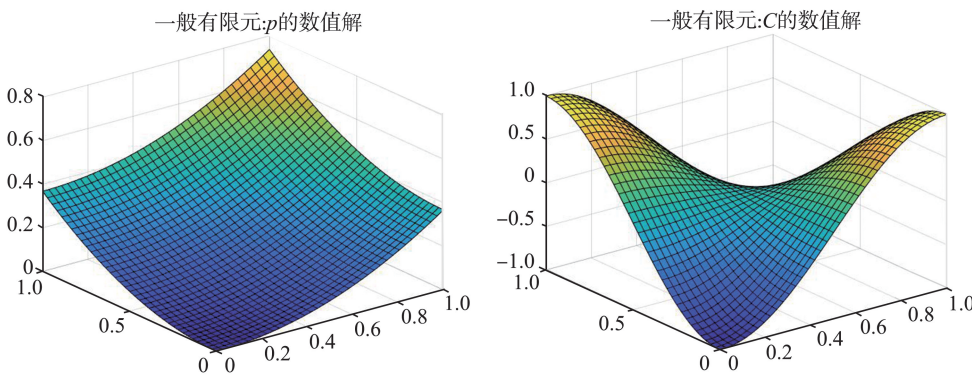


图2 一般有限元的数值解: 左: 压力 p , 右: 浓度 C

Fig.2 Numerical solution of mixed element method. Left: pressure p , Right: concentration C

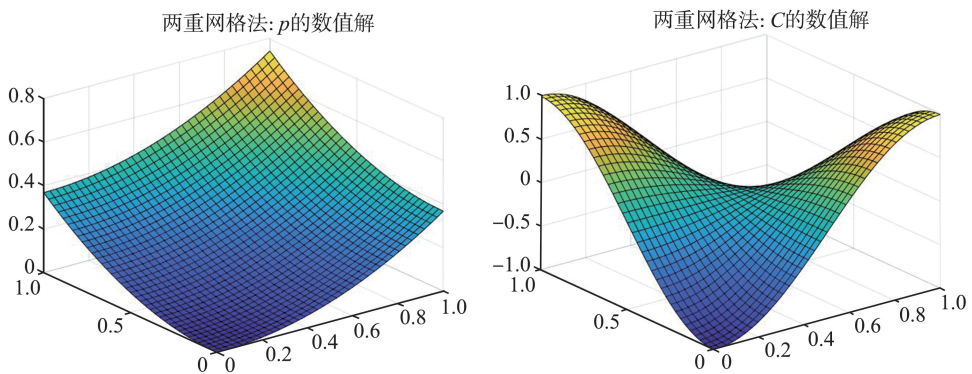


图3 两重网格法方法的数值解: 左: 压力 p , 右: 浓度 C

Fig.3 Numerical solution of two-grid method. Left: pressure p , Right: concentration C

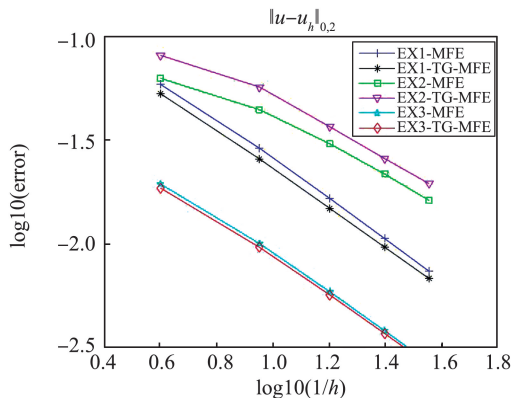


图4 速度 u 的收敛速度

Fig.4 Convergence rate for velocity u

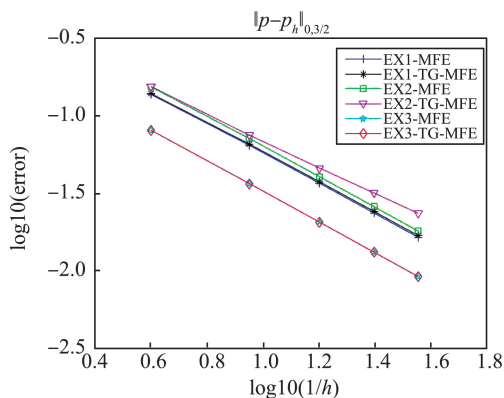
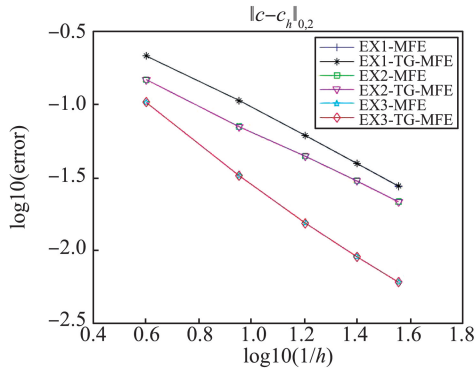


图5 压力 p 的收敛速度

Fig.5 Convergence rate for pressure p

图 6 浓度 c 的收敛速度Fig.6 Convergence rate for concentration c

参考文献:

- [1] AZIZ K, SETTARI A. Petroleum reservoir simulation[M]. [S.l.]: Applied Science Publishers LTD, 1979.
- [2] BREZZI F, DOUGLAS Jr J, DURAN R, et al. Mixed finite elements for second order elliptic problems in three variables[J]. Numerische Mathematik, 1987, 51(2):237-250. doi:10.1007/bf01396752.
- [3] BREZZI F, DOUGLAS Jr J, MARINI L D. Two families of mixed finite elements for second order elliptic problems[J]. Numerische Mathematik, 1985, 47(2):217-235. doi:10.1007/bf01389710.
- [4] DOUGLAS Jr J, PAES-LEMEP J, GIORGI T. Generalized Forchheimer flow in porous media, in boundary value problems for partial differential equations and applications[M]. Amsterdam: Elsevier Science Publishers, 1993: 207-216.
- [5] FAIRAG F A, AUDU J D. Two-level Galerkin mixed finite element method for Darcy: Forchheimer model in porous media [J]. SIAM Journal on Numerical Analysis, 2020, 58(1):234-253. doi:10.1137/17m1158161.
- [6] GIRAULT V, WHEELER M F. Numerical discretization of a Darcy–Forchheimer model[J]. Numerische Mathematik, 2008, 110(2):161-198. doi:10.1007/s00211-008-0157-7.
- [7] LI X L, RUI H X. A fully conservative block-centered finite difference method for Darcy–Forchheimer incompressible miscible displacement problem[J]. Numerical Methods for Partial Differential Equations, 2020, 36(1):66-85. doi:10.1002/num.22400.
- [8] LIU S, CHEN Y P, HUANG Y Q, et al. Two-grid methods for miscible displacement problem by Galerkin methods and mixed finite-element methods[J]. International Journal of Computer Mathematics, 2018, 95(8):1453-1477. doi:10.1080/00207160.2017.1322689.
- [9] LIU W, CUI J T. A two-grid block-centered finite difference algorithm for nonlinear compressible Darcy–Forchheimer model in porous media[J]. Journal of Scientific Computing, 2018, 74(3):1786-1815. doi:10.1007/s10915-017-0516-6.
- [10] LOPEZ H, MOLINA B, SALAS J J. Comparison between different numerical discretizations for a Darcy–Forchheimer model [J]. Electronic Transactions on Numerical Analysis ETNA, 2008, 34:187-203.
- [11] PARK E J. Mixed finite element methods for generalized Forchheimer flow in porous media[J]. Numerical Methods for Partial Differential Equations, 2005, 21(2):213-228. doi:10.1002/num.20035.
- [12] PAN H, RUI H X. Mixed element method for two-dimensional Darcy – Forchheimer model [J]. Journal of Scientific Computing, 2012, 52(3):563-587. doi:10.1007/s10915-011-9558-3.
- [13] PAN H, RUI H X. A mixed element method for Darcy-Forchheimer incompressible miscible displacement problem [J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2013, 264:1-11. doi:10.1016/j.cma.2013.05.011.
- [14] RUI H X, LIU W. A two-grid block-centered finite difference method for darcy: Forchheimer flow in porous media[J]. SIAM Journal on Numerical Analysis, 2015, 53(4):1941-1962. doi:10.1137/14097954x.
- [15] RUI H X, PAN H. A block-centered finite difference method for slightly compressible Darcy–Forchheimer flow in porous media[J]. Journal of Scientific Computing, 2017, 73(1):70-92. doi:10.1007/s10915-017-0406-y.
- [16] WANG Y, CHEN Y P. A two-grid method for incompressible miscible displacement problems by mixed finite element and Eulerian–Lagrangian localized adjoint methods[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2018, 468(1):406-422. doi:10.1016/j.jmaa.2018.08.021.
- [17] XU J C. A novel two-grid method for semilinear elliptic equations[J]. SIAM Journal on Scientific Computing, 1994, 15(1):231-237. doi:10.1137/0915016.
- [18] XU J C. Two-grid discretization techniques for linear and nonlinear PDEs[J]. SIAM Journal on Numerical Analysis, 1996, 33(5):1759-1777. doi:10.1137/s0036142992232949.
- [19] XU W W, LIANG D, RUI H X, et al. A multipoint flux mixed finite element method for Darcy–Forchheimer incompressible miscible displacement problem[J]. Journal of Scientific Computing, 2020, 82(1):1-20. doi:10.1007/s10915-019-01103-0.